

**קיץ א' 2018 – שאלון 035382**

אלגברה

1. בחנות תכשיטים מוכרים טבעות ושעונים.  
 המחיר של כל טבעת הוא קבוע, וגבוה ב- 60% ממחירו של כל שעון (שגם הוא קבוע).  
 המחיר של 4 טבעות הוא 4,032 שקלים.  
 א. מהו המחיר של שעון אחד?  
 ב. בחנות נמכרו 22 פריטים (טבעות ושעונים) בעסקה שסכומה 17,262 שקלים.  
 כמה טבעות נמכרו בעסקה זו, וכמה שעונים נמכרו בה?

**פתרון:**

א. נבנה טבלה ובה נייצג את מחירי הטבעות והשעונים בחנות באמצעות  $x$ . נתון שמחיר הטבעת גבוה ב-60% ממחיר השעון. נסמן:

מחיר שעון לפני ההנחה  $\leftarrow x$  מחיר טבעת לפני ההנחה  $\leftarrow 1.6x$

סה"כ	מספר פריטים	מחיר לפריט בודד	
$x$	1	$x$	מחיר שעון
$6.4x$	4	$1.6x$	מחיר טבעת

נתון כי המחיר של 4 טבעות הוא 4,032. לפי הטבלה מחיר ארבע הטבעות הוא  $6.4x$  ולכן:

$$6.4x = 4,032 \quad /\div 6.4$$

$$x = 630$$

תשובה:

מחירו של שעון אחד הוא 630 שקלים

(ב) בסעיף הקודם מצאנו שמחיר שעון הוא 630 ₪ ונתון כי מחיר הטבעת גדול פי 1.6:

$$\text{מחיר טבעת} = 1.6 \cdot \text{שעון}$$

$$\text{מחיר טבעת} = 1.6 \cdot 630 = 1,008$$

מצאנו שמחירה של טבעת אחת הוא 1,008 ₪.

לא נמסר לנו כמה שעונים וכמה טבעות נמכרו, לכן נסמן את מספר השעונים שנמכרו ב- $y$  ואת מספר הטבעות שנמכרו ב- $z$ .  
נבנה טבלה חדשה המתאימה לנתוני העסקה:

סה"כ	מספר פריטים	מחיר לפריט בודד	
$630y$	$y$	630	מחיר שעון
$1,008z$	$z$	1,008	מחיר טבעת

אנחנו יודעים שנמכרו סה"כ 22 פריטים ולכן:

$$y + z = 22$$

כמו כן אנחנו יודעים את מחיר העסקה הכולל – 17,262 ₪ שהוא סכום הטבעות וסכום השעונים שנמכרו, ולכן:

$$630y + 1008z = 17,262$$

קיבלנו משוואה עם שני נעלמים:

$$\begin{cases} x + y = 22 \\ 1008x + 630y = 17,262 \end{cases}$$

ראשית, נביע את  $y$  במשוואה הראשונה בעזרת העברת אגפים:

$$x + y = 22 \quad /-x$$

$$y = 22 - x$$

נציב  $x - 22$  במקום  $y$  במשוואה השנייה:

$$1008x + 630 \cdot (22 - x) = 17,262$$

$$1008x + 13,860 - 630x = 17,262$$

$$378x + 13,860 = 17,262 \quad /-13,860$$

$$378x = 3,402 \quad /\div 378$$

$$x = 9$$

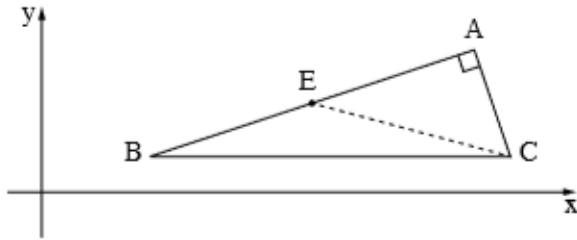
נציב את  $x = 9$  במשוואה הראשונה:

$$9 + y = 22$$

$$y = 13$$

תשובה:

בעסקה נמכרו 13 שעונים ו-9 טבעות



2. ABC הוא משולש ישר זווית ( $\sphericalangle BAC = 90^\circ$ ).

הצלע BC מקבילה לציר ה-x (ראה ציור).

נתון: משוואת הישר BA היא  $y = \frac{1}{3}x$ ,

A(12,4).

א. מצא את משוואת הישר AC.

שיעור ה-x של הקודקוד B הוא 3.

ב. (1) מצא את שיעור ה-y של הקודקוד B.

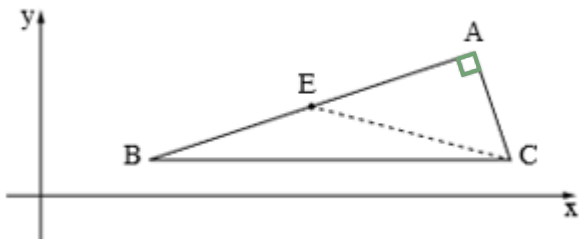
(2) מצא את שיעורי הקודקוד C.

הנקודה E היא אמצע הקטע BA.

ג. חשב את שטח המשולש EAC.

**פתרון:**

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את משוואת הישר AC. נתחיל במציאת השיפוע - לפי הנתונים  $\sphericalangle BAC = 90^\circ$  ולכן השיפוע של הישר AB הופכי ונגדי לשיפוע AC:



$$m_{AB} = \frac{1}{3}$$

$$m_{AB} \cdot m_{AC} = -1$$

$$\frac{1}{3} \cdot m_{AC} = -1 \quad / \div \frac{1}{3}$$

$$m_{AC} = -3$$

נציב נקודה על הישר A(12,4) ואת השיפוע  $m_{AC} = -3$  במשוואת הקו הישר:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$

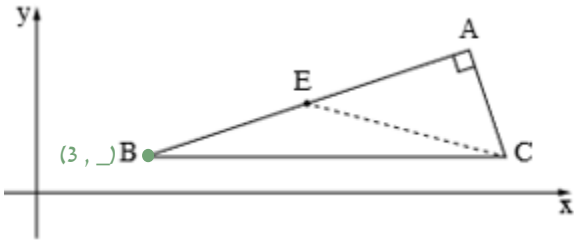
$$y - 4 = -3 \cdot (x - 12)$$

$$y - 4 = -3x + 36 \quad / +4$$

$$y = -3x + 40$$

תשובה:

$y = -3x + 40$  היא AC משוואת הישר



ב. (1) לפי הנתונים שיעור ה-x של קודקוד B הוא 3. נקודה B נמצאת על הישר הנתון AB ולכן נציב  $x = 3$  במשוואת הישר:

$$y = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

תשובה:

שיעור ה-y של הנקודה B הוא 1

(2) התבקשו למצוא את שיעורי הנקודה C, הנמצאת על ישר BC. הישר מקביל לציר ה-x, ולכן לכל הנקודות שנמצאות על גביו ישנו אותו שיעור y:

$$y_B = y_C = 1$$

נקודה C נמצאת גם על צלע AC, שאת משוואתה מצאנו בסעיף א'. נציב  $y = 1$  במשוואת ישר AC:

$$1 = -3x + 40 \quad /-40$$

$$-39 = -3x \quad /\div (-3)$$

$$x = 13$$

תשובה:

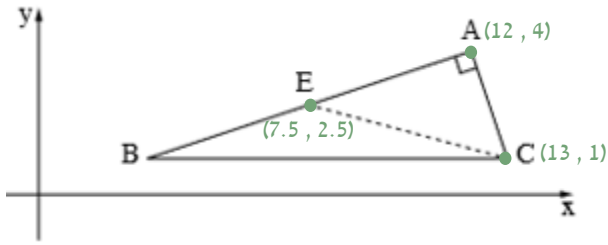
שיעורי הנקודה C:  $C(13, 1)$

ג. בסעיף זה התבקשו לחשב את שטח המשולש EAC. נמצא תחילה את שיעורי הנקודה E. לפי הנתונים E היא נקודת אמצע הקטע BA, ולכן:

$$x_E = \frac{3 + 12}{2} = 7.5$$

$$y_E = \frac{1 + 4}{2} = 2.5$$

מצאנו אם כן את שיעורי הנקודה E:  $(7.5, 2.5)$ .



כעת נמצא את אורכי הצלעות AE ו-AC במשולש. ניעזר בנוסחת הדיסטנס:

אורך הצלע AE:

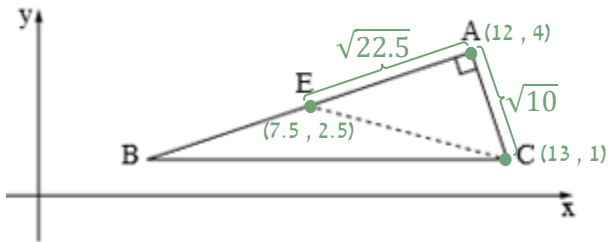
$$d_{AE} = \sqrt{(x_A - x_E)^2 + (y_A - y_E)^2} =$$

$$d_{AE} = \sqrt{(12 - 7.5)^2 + (4 - 2.5)^2} = \sqrt{4.5^2 + 1.5^2} = \sqrt{22.5}$$

אורך צלע AC:

$$d_{AC} = \sqrt{(x_A - x_M)^2 + (y_A - y_M)^2} =$$

$$d_{AC} = \sqrt{(12 - 13)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

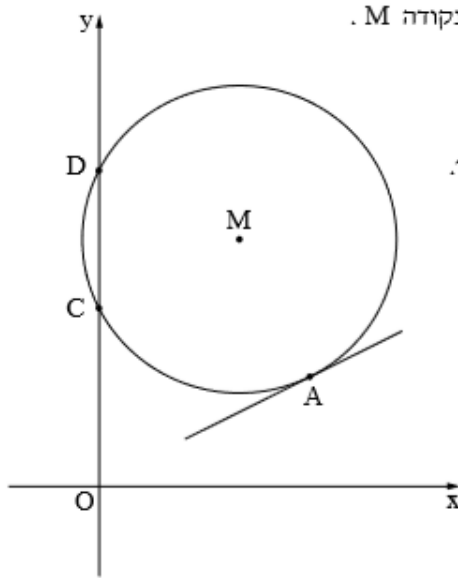


בגלל שהמשולש EAC הוא ישר זווית, ומצאנו את אורכי הניצבים AE ו-AC, נשתמש בהם בנוסחה לחישוב שטח משולש:

$$S_{EAC} = \frac{\sqrt{22.5} \cdot \sqrt{10}}{2} = \frac{15}{2} = 7.5$$

תשובה:

שטח משולש EAC הוא 7.5 יח"ר



3. בציור שלפניך מתואר המעגל  $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = R^2$ , שמרכזו בנקודה M.

הנקודה A(6,3) נמצאת על המעגל (ראה ציור).

O היא ראשית הצירים.

א. (1) חשב את רדיוס המעגל. תוכל להשאיר סימן שורש בתשובתך.

(2) כתוב את משוואת המעגל.

המעגל חותך את ציר ה-y בנקודות C ו-D, כמתואר בציור.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

דרך הנקודה A העבירו משיק למעגל.

ג. (1) מצא את שיפוע המשיק.

(2) מצא את משוואת המשיק.

(3) האם המשיק עובר בראשית הצירים? נמק.

ד. חשב את היקף המרובע AMCO.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

**פתרון:**

א. (1) הנקודה A(6, 3) נמצאת על המעגל, לכן נציב אותה במשוואת המעגל ונקבל:

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = R^2$$

$$(6 - 4)^2 + (3 - 7)^2 = R^2$$

$$(2)^2 + (-4)^2 = R^2$$

$$20 = R^2 \quad \checkmark$$

$$R = \sqrt{20} = 4.472$$

תשובה:

רדיוס המעגל הוא 4.472 יחידות

(2) בסעיף קודם מצאנו  $R^2 = 20$ . נציב זאת במשוואת המעגל.

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 20$$

תשובה:

משוואת המעגל היא:  $(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 20$

ב. הנקודות C, D הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-y ולכן נציב  $x = 0$  במשוואת המעגל:

$$(0 - 4)^2 + (y - 7)^2 = 20$$

$$(4)^2 + (y - 7)^2 = 20$$

$$16 + y^2 - 14y + 49 = 20 \quad /-20$$

$$y^2 - 14y + 45 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -14 \quad c = 45$$

נעזר בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 45}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{2} = \frac{14 \pm 4}{2}$$

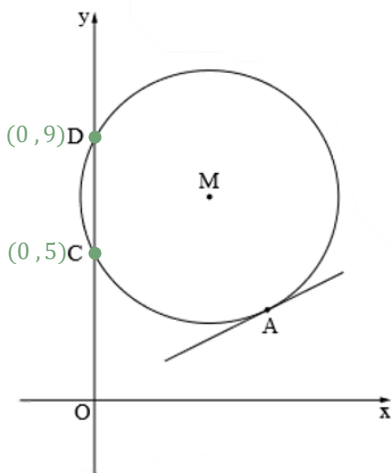
$$x_1 = \frac{14 + 4}{2} = 14$$

$$x_2 = \frac{14 - 4}{2} = 5$$

נמצאנו את שיעורי ה-y של הנקודות, ושיעור ה-x שלן ידוע ( $x = 0$ ).

תשובה:

שיעורי הנקודות C ו-D:  $C(0, 5), D(0, 9)$



ג. (1) כדי למצוא את שיפוע המשיק למעגל נמצא תחילה את השיפוע של MA:

$$m_{MA} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{7 - 3}{4 - 6} = \frac{4}{-2} = -2$$

השיפועים של המשיק והישר MA הופכיים ונגדיים זה לזה ולכן:

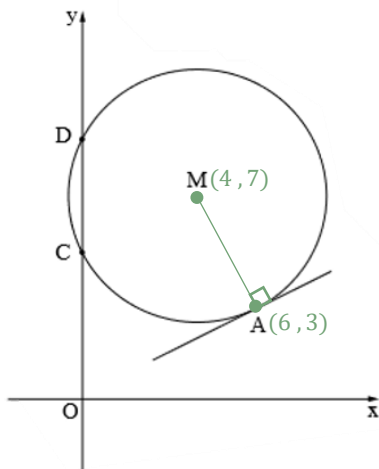
$$m_{MA} \cdot m_{\text{משיק}} = -1$$

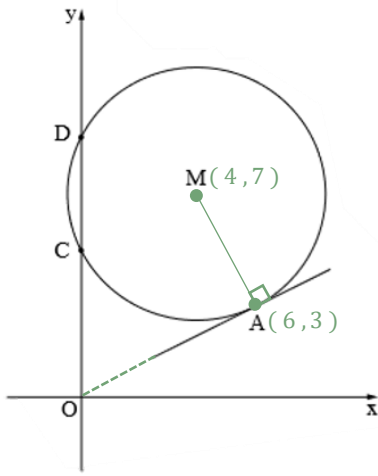
$$-2 \cdot m_{\text{משיק}} = -1 \quad /\div -2$$

$$m_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}$$

תשובה:

שיפוע המשיק בנקודה A הוא  $\frac{1}{2}$





(2) נציב נקודה על המשיק A(6, 3) ואת שיפוע המשיק  $m_{\text{משיק}} = \frac{1}{2}$  במשוואת קו ישר:

$$y - 3 = \frac{1}{2} \cdot (x - 6)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}x - 3 \quad /+3$$

$$y = \frac{1}{2}x$$

תשובה:

משוואת המשיק בנקודה A היא  $y = \frac{1}{2}x$

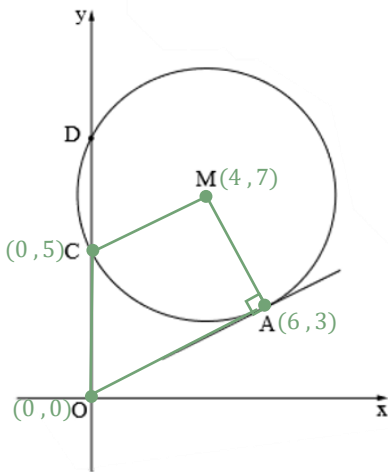
(3) כדי לבדוק אם המשיק עובר בנקודה O(0, 0) נציב את שיעוריה במשוואת המשיק ונבדוק האם מתקיים פסוק אמת:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot 0 \rightarrow 0 = 0$$

קיבלנו  $0 = 0$  וזהו פסוק אמת, ולכן המשיק עובר בראשית הצירים.

תשובה:

המשיק עובר בראשית הצירים



ד. בסעיף זה התבקשנו לחשב את היקף המרובע AMCO.

נמצא את אורכי כל אחת מהצלעות:

אורך הצלע CM  $\leftarrow CM = R = \sqrt{20}$

אורך הצלע AM  $\leftarrow AM = R = \sqrt{20}$

אורך הצלע CO  $\leftarrow CO = y_C - y_O = 5$

אורך הצלע OA  $\leftarrow$  ניעזר בנוסחת הדיסטנס:

$$d_{OA} = \sqrt{(y_O - y_A)^2 + (x_O - x_A)^2} = \sqrt{(0 - 3)^2 + (0 - 6)^2}$$

$$\sqrt{(-3)^2 + (-6)^2} = \sqrt{9 + 36} = \sqrt{45}$$



כעת נסכום את ארבעת הצלעות:

$$P_{AMCO} = OA + AM + MC + CO$$

$$P_{AMCO} = \sqrt{45} + \sqrt{20} + \sqrt{20} + 5 = 20.65$$

תשובה:

היקף המרובע AMCO הוא 20.65 יחידות

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

4. נתונה הפונקציה  $f(x) = 3\sqrt{x}$ .

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה  $f(x)$  ?
- ב. העבירו משיק לגרף הפונקציה  $f(x)$  בנקודה שבה  $x = 4$ .
- (1) מצא את שיפוע המשיק.
- (2) מצא את משוואת המשיק.
- ג. הראה שלפונקציה  $f(x)$  אין נקודות קיצון פנימיות.
- (2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$  (אם יש כאלה).

**פתרון:**

א. הפונקציה מכילה שורש שבו נמצא ערך ה- $x$ :

$$f(x) = 3\sqrt{x}$$

אי אפשר לבצע את פעולת השורש על מספר שלילי, ולכן תחום ההגדרה הוא  $x \geq 0$ .

תשובה:

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא  $x \geq 0$

ב. עלינו למצוא את שיפוע המשיק, לכן נגזור את הפונקציה ולאחר מכן נציב  $x = 4$  בנגזרת:

$$f(x) = 3\sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$$

תשובה:

שיפוע המשיק בנקודה  $x = 4$  הוא  $\frac{3}{4}$

ב. על מנת למצוא את משוואת המשיק עלינו להציב שיפוע ונקודה במשוואת הקו הישר. בסעיף קודם מצאנו ששיפוע המשיק הוא  $\frac{3}{4}$  ולכן נותר למצוא נקודה. נתון שבנקודת ההשקה  $x = 4$ , ולכן נציב זאת במשוואת הפונקציה:

$$f(4) = 3\sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$$

שיעורי נקודת ההשקה: (4, 6).

כעת ניגש למשוואת הקו הישר ונציב את הנתונים:

$$y - 6 = \frac{3}{4} \cdot (x - 4)$$

$$y - 6 = \frac{3}{4}x - 3 \quad /+6$$

$$y = \frac{3}{4}x + 3$$

תשובה:

$$y = \frac{3}{4}x + 3 \text{ היא } x = 4 \text{ נקודה במשיק}$$

ג. (1) כדי להוכיח שלפונקציה אין נקודת קיצון נגזור תחילה את הפונקציה ונשווה את הנגזרת ל-0:


$$f'(x) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$0 = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

$$0 \neq 3 \cdot 1$$

קיבלנו פסוק שקר ולכן אין לפונקציה נקודות קיצון.

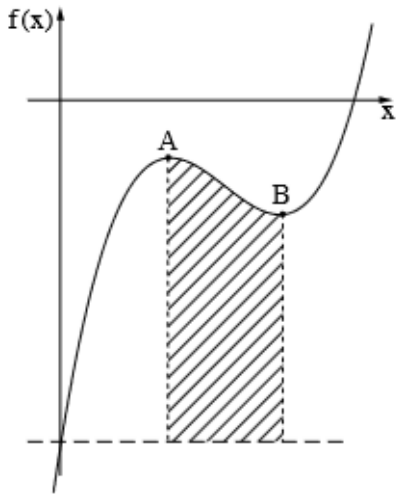
(2) כדי למצוא את תחומי העליה והירידה נעזר בטבלה:

x	x = 0	x = 0
f'(x)		+
f(x)	0	

$$f'(1) = 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} \rightarrow 0 < f'(1)$$

תשובה:

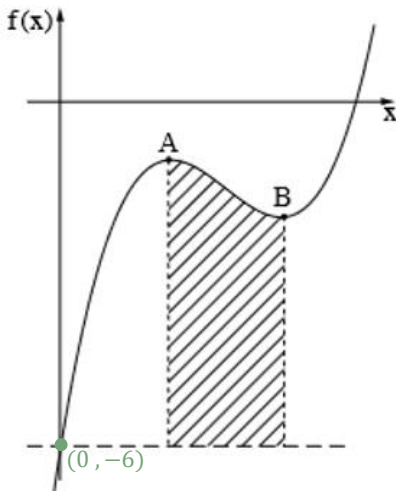
מצאנו שתחומי העליה של הפונקציה הם  $x > 0$  ושלפונקציה אין תחומי ירידה



5. בציור שלפניך מתואר גרף הפונקציה  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$ .  
 דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה  $f(x)$  עם ציר ה- $y$  העבירו ישר המקביל לציר ה- $x$ .
- מצא את משוואת הישר המקביל.
  - $A$  ו- $B$  הן נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$ , כמתואר בציור. מצא את שיעורי הנקודות  $A$  ו- $B$ .
  - דרך הנקודות  $A$  ו- $B$  העבירו אנכים לישר המקביל (ראה ציור).  
 ג. חשב את השטח המקווקו בציור: השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה  $f(x)$ , על ידי האנכים שהעבירו ועל ידי הישר המקביל לציר ה- $x$ .

**פתרון:**

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את משוואת הישר המקביל לציר ה- $x$  ועובר בנקודת חיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $y$ .



נמצא תחילה את נקודת החיתוך בעזרת הצבת  $x = 0$ :

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

$$f(0) = 2 \cdot 0^3 - 9 \cdot 0^2 + 12 \cdot 0 - 6 = -6$$

נקודת החיתוך עם ציר ה- $y$ :  $(0, -6)$ .

משוואת הקו המקביל הוא מסוג  $y = c$  ולכן שיעור ה- $y$  של כלל הנקודות שעליו זהה.

תשובה:

משוואת הישר המקביל לציר ה- $x$  ועובר בנקודת החיתוך עם ציר ה- $y$  היא  $y = -6$

ב. כדי למצוא את נקודות הקיצון נגזור את הפונקציה ולאחר מכן נשווה את הנגזרת ל-0:

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 9 \cdot 2x + 12$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$

נשווה את הנגזרת ל-0:

$$0 = 6x^2 - 18x + 12$$

$a = 6$        $b = -18$        $c = 12$

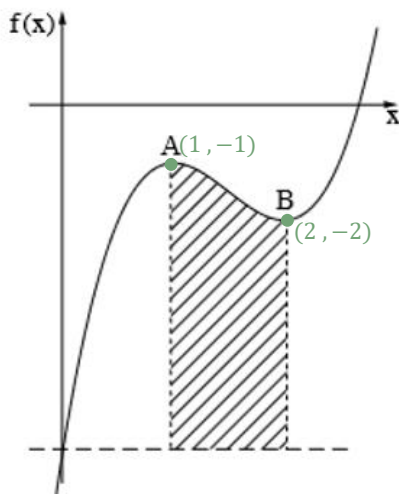
ניעזר בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-(-18) \pm \sqrt{(-18)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6}$$

$$\frac{18 \pm \sqrt{324 - 288}}{12} = \frac{18 \pm 6}{12}$$

$$x_1 = \frac{18 + 6}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{18 - 6}{2} = 1$$



ניעזר במשוואת הפונקציה ונמצא את שיעורי ה-y של כל אחת מהנקודות:

$$f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 6 = -2$$

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 6 = -1$$

נתבונן בגרף ונתאים לכל נקודה את שיעורי הנקודות המתאימים לה:

לפי הגרף נוכל לראות שנקודת הקיצון A היא נקודת מקסימום ונקודת הקיצון B היא נקודת מינימום.

שיעורי הנקודות A ו-B: A(1, -1), B(2, -2)

ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$  ו-  $y = -6$

ולכן נבצע אינטגרל:

פונקציה עליונה  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$  ←

פונקציה תחתונה  $y = -6$  ←

הפרש  $2x^3 - 9x^2 + 12x - 6 - (-6) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$  ←

נחשב את השטח התחום בין הנקודות A ו-B אותנו מצאנו בסעיפים קודמים:

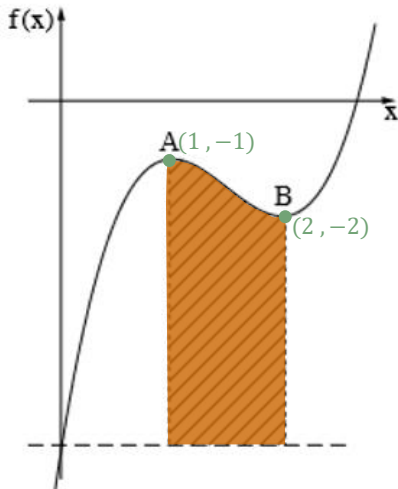
$$\int_1^2 (2x^3 - 9x^2 + 12x) dx = \left[ \frac{2x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{12x^2}{2} \right]_1^2$$

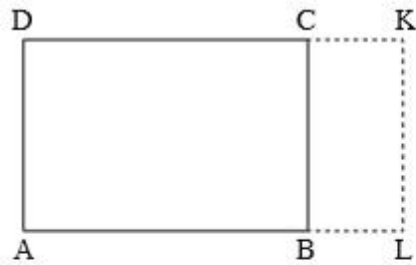
$$\left( \frac{2 \cdot 2^4}{4} - \frac{9 \cdot 2^3}{3} + \frac{12 \cdot 2^2}{2} \right) - \left( \frac{2 \cdot 1^4}{4} - \frac{9 \cdot 1^3}{3} + \frac{12 \cdot 1^2}{2} \right) =$$

$$8 - 3.5 = 4.5$$

תשובה:

גודלו של השטח המקוקו בציור הוא 4.5 יח"ר





6. ABCD הוא מלבן ששטחו 25.

נסמן את אורך הצלע AB ב-  $x$ .

א. הבע באמצעות  $x$  את אורך הצלע AD.

האריכו כל אחת מן הצלעות AB ו- DC ב- 2, כך שהתקבל

מלבן חדש – ALKD, כמותואר בציור.

ב. (1) הבע באמצעות  $x$  את היקף המלבן ALKD.

(2) מצא את אורך הצלע AB שבעבורה היקף המלבן ALKD הוא מינימלי.

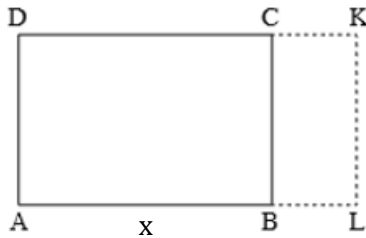
**פתרון:**

א. לפי הנתונים שטח המלבן הוא 25. נביע את שטח המלבן:

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$

$$25 = x \cdot AD \quad / \div x$$

$$\frac{25}{x} = AD$$



תשובה:

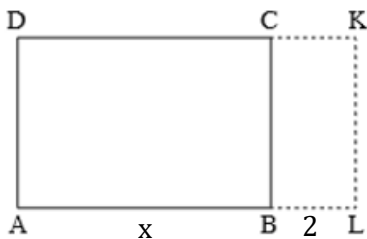
מצאנו שאת הצלע AD ניתן להביע באופן הבא:  $AD = \frac{25}{x}$

ב. (1) נביע באמצעות  $x$  את סכום צלעות המלבן ALKD:

$$p(x) = 2 \cdot AL + 2 \cdot AD$$

$$p(x) = 2 \cdot (2 + x) + 2 \cdot \frac{25}{x}$$

$$p(x) = 4 + 2x + \frac{50}{x}$$



מצאנו שאת היקף המלבן ALKD ניתן להביע באופן הבא:  $p(x) = 4 + 2x + \frac{50}{x}$



(2) עלינו למצוא את  $x$  עבורו היקף המלבן ALKD הינו מינימלי לכן נגזור את פונקציית ההיקף ולאחר מכן נשווה אותה ל-0:

$$p(x) = 4 + 2x + \frac{50}{x}$$

$$p'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

$$0 = 2 - \frac{50}{x^2} \quad / + \frac{50}{x^2}$$

$$\frac{50}{x^2} = 2 \quad / x^2$$



$$50 = 2x^2 \quad / : 2$$

$$25 = x^2$$

$$x \pm 5$$

נשים לב שהפתרון  $x = -5$  נפסל כי  $x$  מייצג אורך של צלע, שאינו יכול להיות שלילי.

כעת נבדוק ש- $x = 5$  הוא נקודת מינימום בעזרת טבלה:

x	x = 0	x = 1	x = 5	x = 6
$p'(x)$		-	0	+
$p(x)$			MIN	

$$p'(1) = 2 - \frac{50}{1^2} = -48 \rightarrow p'(1) < 0$$

$$p'(6) = 2 - \frac{50}{6^2} = -48 \rightarrow 0 < p'(1)$$

לפי הטבלה הנקודה  $x = 5$  היא נקודת מינימום, ומכאן שזהו האורך עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

תשובה:

עבור הערך  $x = 5$  היקף המלבן ALKD הוא מינימלי