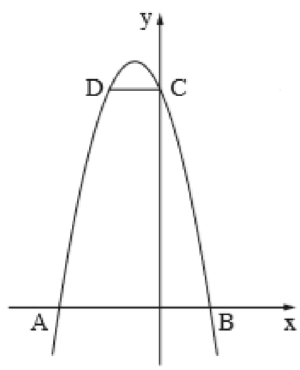
חורף 2018 – שאלון 035381

אלגברה



1. בציור שלפניך מוצג סרטוט של גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 - 3x + 18$.

A ו-B הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-x כמתואר בציור.

C היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה f(x) עם ציר ה-y.

הנקודה D נמצאת על גרף הפונקציה f(x) כך שהקטע DC מקביל לציר ה-x.

א. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C ו-D.

ב. חשב את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח הטרפז.

פתרון:

א. בסעיף זה עלינו למצוא את שיעורי הנקודות D, C, B, A.

נתחיל בנקודות A ו-B שהן נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x.

נציב $f(x) = 0$ במשוואת הפרבולה:

$$f(x) = -x^2 - 3x + 18$$

$$0 = -x^2 - 3x + 18$$

a = -1 b = -3 c = 18

כעת, נעזר בנוסחת השורשים ונחלץ את שני הפתרונות האפשריים:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 18}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{-2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{81}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{3 + 9}{-2} = -6 \qquad x_2 = \frac{3 - 9}{-2} = 3$$

A נמצאת בחלק השלילי של ציר ה-x ולכן: A(-6 , 0), B (3 , 0)

עבור לנקודה C שהיא נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה-y ולכן נציב $x = 0$ במשוואת הפרבולה:

$$f(0) = -0^2 - 3 \cdot 0 + 18$$

$$f(0) = 18$$

מכאן נוכל להסיק: C(0 , 18)

נעבור לנקודה D, שלפי הנתונים נמצאת על הישר CD שמקביל לצירים. נשים לב שגם נקודה C נמצאת על ישר זה, כלומר שתי הנקודות באותו הגובה ולכן יש להן את אותו שיעור y:

$$y_C = y_D = 18$$

נציב $y = 18$ במשוואת הפרבולה:

$$18 = -x^2 - 3x + 18 \ /{-18}$$

$$0 = -x^2 - 3x$$

a = -1   b = -3   c = 0

נעזר בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x_1 = \frac{3+3}{-2} = -3$$

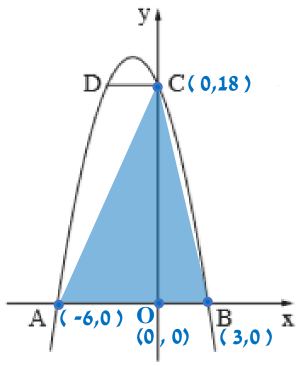
הנקודה D: D(-3 , 18)

$$x_2 = \frac{3-3}{-2} = 0$$

הנקודה C: C(0 , 18)

תשובה:

שיעורי הנקודות A, B, C ו-D: A(-6 , 0) B(3 , 0) C(0 , 18) D(-3 , 18)

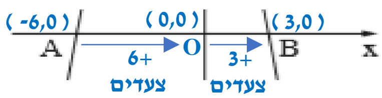


ב. בסעיף זה התבקשנו למצוא את שטח משולש ABC. נרשום על גבי הסרטוט את שיעורי הנקודות הידועים, ונגדיר מטעמי נוחות את הנקודה O כראשית הצירים:

נעזר בנוסחת שטח משולש:

$$S_{\text{משולש}} = \frac{\text{גובה לבסיס} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

נשים לב שהקטע AB נמצא על ציר ה-x, ולכן נוכל לחשב את מספר ה"צעדים" משיעור ה-x של נקודה A לשיעור ה-x של נקודה B:



$$AB = 3 + 6 = \text{9 יחידות}$$

הנקודה C נמצאת על גבי ציר ה-y, ולכן מספר "הצעדים" בינה לבין הנקודה O פשוט שווה לשיעור ה-y שלה:

$$CO = y_C = \text{18 יחידות}$$

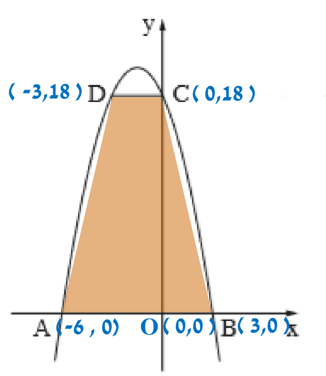
כעת, כשהנתונים בידינו ניגש לנוסחת שטח המשולש ונציב:

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot CO}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{9 \cdot 18}{2} = 81$$

תשובה:

שטח משולש ABC הוא 81 יח"ר



ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את שטח הטרפז ABCD:

ניעזר בנוסחת שטח טרפז:

$$S_{\text{טרפז}} = \frac{(\text{בסיס 1} + \text{בסיס 2}) \cdot \text{גובה}}{2}$$

בסעיף הקודם מצאנו: AB = 9 יחידות, CO = 18 יחידות.

לכן, נותר למצוא את DC על ידי חישוב מספר ה"צעדים" מנקודה D לנקודה C. נוכל לראות שלשתי הנקודות אותו שיעור ה-y, ולכן נוכל פשוט לחשב את ההפרש בין שיעורי ה-x שלהן:

$$DC = x_C - x_D = 0 - (-3) = 3$$

נציב את הנתונים בנוסחה:

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + DC) \cdot CO}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(9 + 3) \cdot 18}{2} = 108$$

תשובה:

שטח הטרפז הוא 108 יח"ר

2. ב-1.1.2018 היו בתוכנית החיסכון של יעל 30,870 שקלים.

תוכנית החיסכון מניבה רווח של 5% מדי שנה.

א. מה יהיה סכום החיסכון של יעל בתוכנית החיסכון ב-1.1.2030?

ב. יעל התחילה לחסוך בתוכנית החיסכון ב-1.1.2016 .

מצא את סכום החיסכון ההתחלתי שלה.

ג. ב-1.1 של איזו שנה יהיו לראשונה בתוכנית החיסכון של יעל יותר מ-35,000 שקלים?

פתרון:

א. שאלה זו עוסקת בגדילה ודעיכה. לפי הנתונים, אחוז **הרווח** הוא 5%. נעזר בנוסחה ונמצא את **הגדילה** q:

$$q = \frac{100 + p}{100} = \frac{100 + 5}{100} = 1.05$$

כמו כן, נתון שהסכום ההתחלתי בתוכנית החסכון הוא 30,870, ועלינו למצוא את הסכום בתאריך 1.1.2013 , כלומר לאחר 12 שנה.

נתונים:

- הסכום ההתחלתי ← $M_0 = 30{,}870$
- שיעור הגדילה ← $q = 1.05$
- הזמן – 12 שנה ← $t = 12$

נעזר בנוסחה על מנת לחשב את הערך M_{12}:

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$M_{12} = 30{,}870 \cdot 1.05^{12}$$

$$M_{12} = 55{,}438$$

תשובה:

סכום החסכון בתאריך 1.1.2030 הוא 55,438 שקלים

ב. בסעיף זה התבקשנו לחשב את הסכום שהיה ליעל בתאריך 1.1.2016, כלומר **שנתיים לפני** M_0. נסמן $t = -2$ ונציב את הנתונים בנוסחה:

- הסכום ההתחלתי ← $M_0 = 30{,}870$
- שיעור הגדילה ← $q = 1.05$
- הזמן – **לפני** שנתיים ← $t = -2$

$$m_t = m_0 \cdot q^t$$

$$m_{-2} = 30{,}870 \cdot 1.05^{-2}$$

$$m_{-2} = 28{,}000$$

תשובה:

הסכום ההתחלתי בתוכנית החסכון הוא 28,000 שקלים.

ג. בשאלה זו נשאלנו מתי בפעם הראשונה היו ליעל **יותר** מ-35,000 שקלים בתכנית החיסכון.

תחילה, נמצא מתי בפעם הראשונה היו ליעל 35,000. נציב בנוסחה:

- $M_0 = 30{,}870$
- $q = 1.05$
- $M_t = 35{,}000$
- $t = ?$

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$35{,}000 = 30{,}870 \cdot 1.05^t$$

בגלל שנשאלנו על התאריך ה-1.1 באיזו שהיא שנה, נוכל פשוט להציב ערכי t שלמים, ולבחון מהו הערך הקטן ביותר שיתן תוצאה הגדולה מ-35,000. כעת, נציב ערכי t ונבדוק באיזו שנה הסכום היה גבוה מ-35,000:

$$t = 1 \rightarrow 30{,}870 \cdot 1.05 = 32{,}413.5$$

$$t = 2 \rightarrow 30{,}870 \cdot 1.05^2 = 34{,}034.2$$

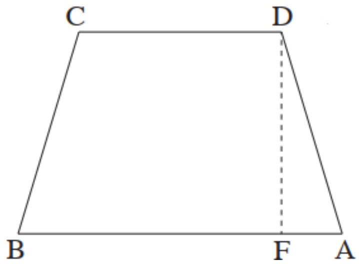
$$t = 3 \rightarrow 30{,}870 \cdot 1.05^3 = 35{,}735.9$$

מכאן ש-3 שנים אחרי ה-1.1.2018 היו יותר מ-35,000 שקלים בתכנית החיסכון של יעל.

תשובה:

ב-1.1.2021. יהיו לראשונה בתוכנית החיסכון של יעל יותר מ-35,000 שקלים.

<u>טריגונומטריה</u>



3. ABCD הוא טרפז שווה שוקיים (BA∥CD). DF הוא גובה בטרפז (ראה ציור).

נתון: CD = 15 ס״מ , BA = 24 ס״מ ,

גודל הזווית BAD הוא $71°$.

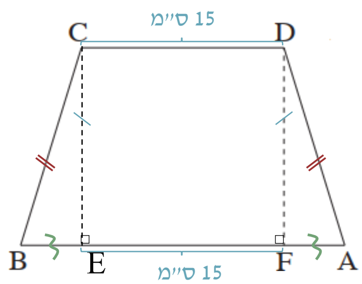
א. חשב את אורך הקטע AF.

ב. חשב את אורך השוק AD.

ג. חשב את גודל הזווית DBF.

פתרון:

א. נמתח גובה נוסף בטרפז היוצא מקודקוד C, כך שנוצר מלבן CDFE, שנתונה לנו אחת מצלעותיו:



$$\sphericalangle CEB = \sphericalangle DFA = 90°$$

$$EF = CD = 15 \text{ ס"מ}$$

$$CE = DF$$

נתון לנו ש-ABCD הוא טרפז שווה שוקיים, ומכאן:

$$CB = DA$$

יש לנו אם כן זוג משולשים זהים CEB ו-DFA, וביניהם מלבן CDFE:

$$BE = FA$$

נשתמש באורך הנתון של הצלע BA (24 ס״מ) כדי למצוא את אורך הקטע AF:

$$BA = BE + AF + EF = 24$$

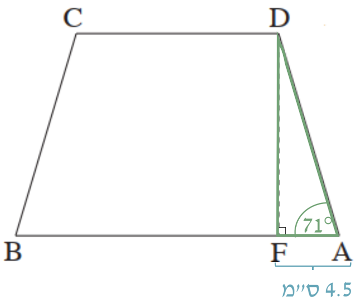
$$2 \cdot AF + 15 = 24 \quad /-15$$

$$2 \cdot AF = 9 \quad /\div 2$$

$$AF = 4.5 \text{ ס"מ}$$

תשובה:

אורך הקטע AF הוא 4.5 ס״מ



ב. נתמקד במשולש ישר הזווית AFD המכיל את הצלע AD שעליה נשאלנו :

את אורך הצלע AF מצאנו בסעיף הקודם, וזווית BAD הסמוכה לה נתונה לנו,
ולכן נשתמש בנוסחת הקוסינוס :

$$\cos DAF = \frac{AF}{AD}$$

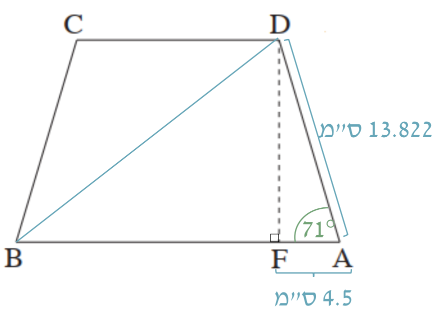
$$\cos 71 = \frac{4.5}{AD} \quad \color{red}{/\cdot AD}$$

$$AD \cdot \cos 71 = 4.5 \quad \color{red}{/\div \cos 71°}$$

$$AD = \frac{4.5}{\cos 71} = 13.822 \text{ ס"מ}$$

תשובה :

אורך השוק AD הוא 13.822 ס"מ



ג. נמתח ישר בין קודקוד D ל-B, ונתבונן במשולש DBA שנוצר :

נשים לב שמשולש זה אינו ישר זווית, ולכן לא נוכל להציב את מה שנתון לנו לגביו בנוסחאות טריגונומטריות. עם זאת, המשולש BDF הוא משולש ישר זווית, המכיל בתוכו את הזווית DBF עליה נשאלנו.

נתמקד שוב משולש DFA, ונמצא בעזרת נוסחת הסינוס את אורכו של הצלע DF :

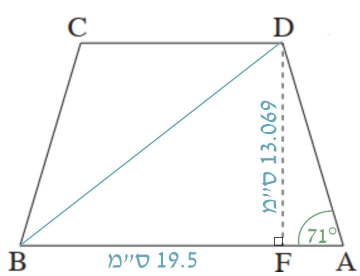
$$\sin DAF = \frac{FD}{AD}$$

$$\sin 71 = \frac{FD}{13.822} \quad \color{red}{/\cdot 13.822}$$

$$FD = 13.822 \cdot \sin 71 = 13.069$$

כעת נתמקד במשולש ישר הזווית DFB :

$$BF = BA - FA = 24 - 4.5 = 19.5$$



נתונים לנו אורכי הניצבים במשולש, ולכן נשתמש בנוסחת הטנגנס :

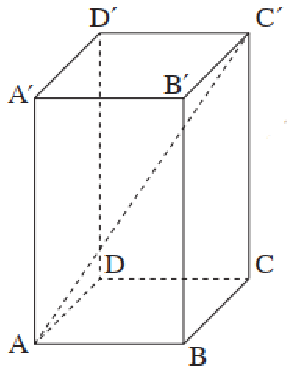
$$\tan DBF = \frac{FD}{BF}$$

$$\tan DBF = \frac{13.069}{19.5} = 0.67 \quad \color{red}{/\tan^{-1}}$$

$$\measuredangle DBF = 33.822°$$

תשובה :

גודל הזווית DBF הוא 33.822°



4. נתונה תיבה ABCDA′B′C′D שבסיסה, ABCD , הוא מלבן (ראה ציור).

נתון: AB = 12 ס״מ , BC = 9 ס״מ ,

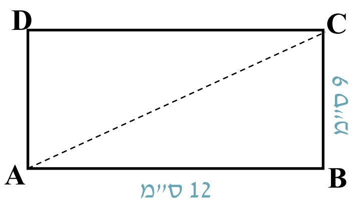
גודל הזווית שבין אלכסון התיבה AC′ לבין בסיס התיבה, ABCD , הוא $58°$.

א. חשב את אורך אלכסון הבסיס.

ב. חשב את האורך של מקצוע התיבה CC′.

ג. חשב את שטח המעטפת של התיבה.

פתרון:



א. בסעיף זה התבקשנו לחשב את אורך אלכסון הבסיס. נתבונן ב״מבט על״ על הבסיס ABCD:

ניעזר במשפט פתגורס ונמצא את אלכסון AC:

$$\text{ניצב}^2 + \text{ניצב}^2 = \text{יתר}^2$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

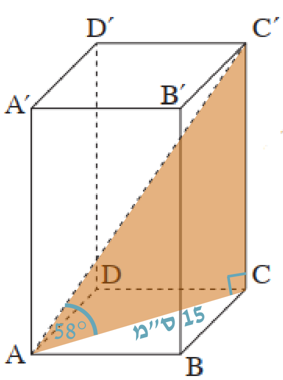
$$12^2 + 9^2 = AC^2$$

$$225 = AC^2 \quad /\sqrt{}$$

$$AC = 15$$

תשובה:

אורך אלכסון AC הוא 15 ס״מ.



ב. ניעזר באלכסון שמצאנו בסעיף הקודם ונשלים באמצעותו את משולש ישר זווית ACC′:

בסעיף א׳ מצאנו כי AC = 15 ס״מ, ולפי הנתונים $\sphericalangle C'AC = 58°$.

נשתמש בנוסחת הטנגנס ונחלץ את CC′:

$$\tan 58 = \frac{CC'}{15} \quad /\cdot 15$$

$$15 \cdot \tan 58 = CC'$$

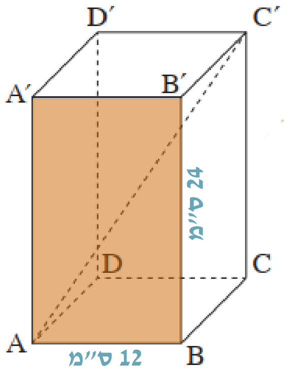
$$CC' = 24$$

תשובה:

אורך הצלע CC′ הוא 24 ס״מ

ג. שטח המעטפת הוא שטח 4 פאות התיבה הצדדיות ("הקירות" של התיבה).

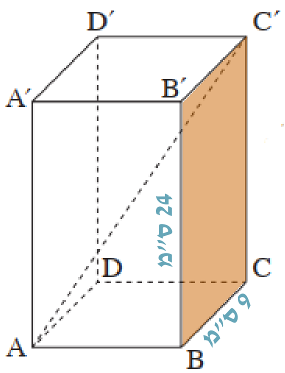
נתון: $AB = 12$ $BB' = 24$



נחשב את שטח מלבן **A′B′BA**:

$$AB \cdot BB' = 12 \cdot 24 = 288$$

מכיוון שבתיבה פאות נגדיות הן שוות, $S_{A'B'BA} = S_{D'C'CD} =$ 288 סמ"ר



כעת, נחשב את שטח מלבן **B′C′CB**:

$$BC \cdot CC' = 9 \cdot 24 = 216$$

מכיוון שבתיבה פאות נגדיות הן שוות, $S_{B'C'CB} = S_{A'D'DA} =$ 216 סמ"ר

כעת, נחשב את סכום 4 הפאות:

$2 \cdot 216 + 2 \cdot 288 =$ 1,008 סמ"ר

תשובה:

שטח המעטפת הוא 1008 סמ"ר

<u>הסתברות וסטטיסטיקה</u>

5. נתונים שני גלגלי מזל — גלגל א וגלגל ב (ראה ציור).

גלגל א מחולק לשלוש גזרות שוות שעליהן כתובים המספרים 1 , 2 ו-3.

גלגל ב מחולק לארבע גזרות:

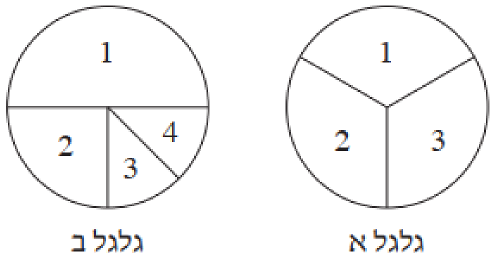
גזרה שהיא $\frac{1}{2}$ מהעיגול ועליה כתוב המספר 1,

גזרה שהיא $\frac{1}{4}$ מהעיגול ועליה כתוב המספר 2,

גזרה שהיא $\frac{1}{8}$ מהעיגול ועליה כתוב המספר 3,

ועוד גזרה שהיא $\frac{1}{8}$ מהעיגול ועליה כתוב המספר 4.

מסובבים כל אחד מהגלגלים פעם אחת.



א. מהי ההסתברות שגם גלגל א וגם גלגל ב ייעצרו על המספר 3?

ב. מהי ההסתברות שסכום המספרים ששני הגלגלים ייעצרו עליהם יהיה 5?

ג. מהי ההסתברות שהמספר שעליו ייעצר גלגל א יהיה גדול יותר מהמספר שעליו ייעצר גלגל ב?

פתרון:

תחילה, נבחן את הנתונים ונמצא את חלוקת ההסתברויות עבור כל גלגל. ההסתברות להיעצר על נגזרת מסויימת שווה לחלקה היחסי מהעיגול:

גלגל א׳:

הגלגל מחולק ל-3 חלקים שווים. לכן –

ההסתברות עבור 1: $\frac{1}{3}$

ההסתברות עבור 2: $\frac{1}{3}$

ההסתברות עבור 3: $\frac{1}{3}$

גלגל ב׳:

ההסתברות עבור 1: $\frac{1}{2}$

ההסתברות עבור 2: $\frac{1}{4}$

ההסתברות עבור 3: $\frac{1}{8}$

ההסתברות עבור 4: $\frac{1}{8}$

א. נחשב את ההסתברות שגם גלגל א׳ וגם גלגל ב׳ יעצרו על המספר 3:

$$P(3,3)=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{24}$$

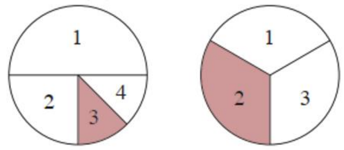
תשובה:

ההסתברות ששני הגלגלים יעצרו על 3 היא $\frac{1}{24}$

ב. בגלל שלא מדובר במספר רב של מקרים, נתחיל בלפרט באילו מקרים סכום המספרים הוא 5 :

<u>מקרה 1</u> : גלגל א' יעצר על 2 וגלגל ב' יעצר על 3.

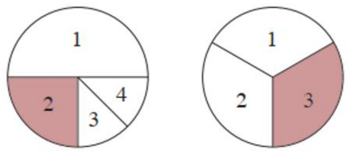
במקרה זה ההסתברות היא $P(2,3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$



גלגל א גלגל ב

<u>מקרה 2</u> : גלגל א' יעצר על 3 וגלגל ב' יעצר על 2.

במקרה זה ההסתברות היא $P(3,2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.



גלגל א גלגל ב

<u>מקרה 3</u> : גלגל א' יעצר על 1 וגלגל ב' יעצר על 4.

במקרה זה ההסתברות היא $P(1,4) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{24}$.

גלגל א גלגל ב

נסכום את ההסתברויות :

$$P(\text{סכום המספרים יהיה 5}) = \frac{1}{24}+\frac{1}{24}+\frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

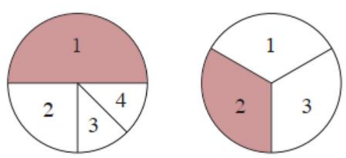
תשובה :

ההסתברות שסכום המספרים שהגלגלים יעצרו עליהם הוא 5 היא $\frac{1}{6}$

ג. בגלל שלא מדובר במספר רב של מקרים, נפרט באילו מקרים המספר שעליו יעצר גלגל א' יהיה גדול יותר מהמספר שיעצר עליו גלגל ב' :

<u>מקרה 1</u> : גלגל א' יעצר על 2 וגלגל ב' יעצר על 1.

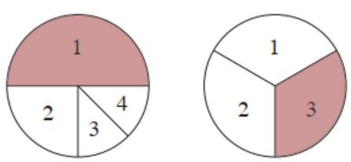
במקרה זה ההסתברות היא $P(2,3) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$



גלגל א גלגל ב

<u>מקרה 2</u> : גלגל א' יעצר על 3 וגלגל ב' יעצר על 1.

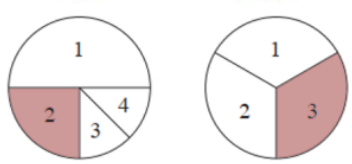
במקרה זה ההסתברות היא $P(3,1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.



גלגל א גלגל ב

<u>מקרה 3</u> : גלגל א' יעצר על 3 וגלגל ב' יעצר על 2.

במקרה זה ההסתברות היא $P(3,2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.



גלגל א גלגל ב

נסכום את ההסתברויות :

$$P(\text{סכום גלגל א'} > \text{סכום גלגל ב'}) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{5}{12}$$

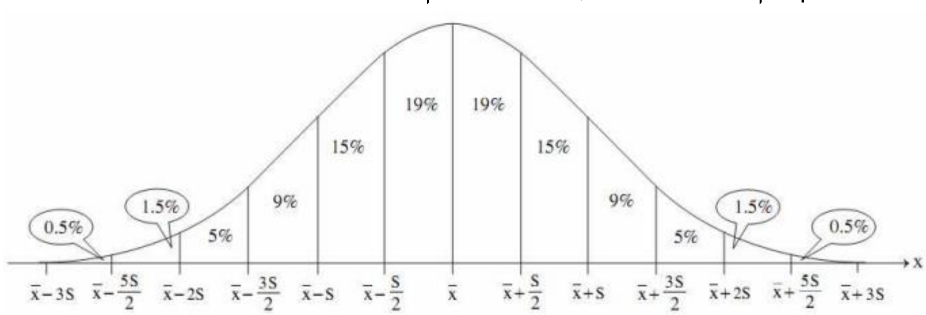
תשובה :

ההסתברות שהמספר שעליו יעצר גלגל א' יהיה גדול יותר מהמספר שיעצר עליו גלגל ב' היא $\frac{5}{12}$

6. ציוני תלמידים במבחן ארצי מתפלגים נורמלית.
סטיית התקן של הציונים היא 8.
16% מן הציונים גבוהים מ-80.

א. מהו הממוצע של ציוני הנבחנים?
ב. בוחרים נבחן באקראי. מהי ההסתברות שציונו במבחן נמוך מ-56?
ג. הוחלט שהתלמידים שציוניהם הם הגבוהים ביותר יקבלו תעודת הצטיינות.
התלמידים שקיבלו תעודת הצטיינות הם 7% מכלל הנבחנים.
הציון של דביר הוא 83. האם הוא קיבל תעודת הצטיינות? נמק.

לפניך גרף ההתפלגות הנורמלית מדף הנוסחאות. היעזר בו בחישוביך.

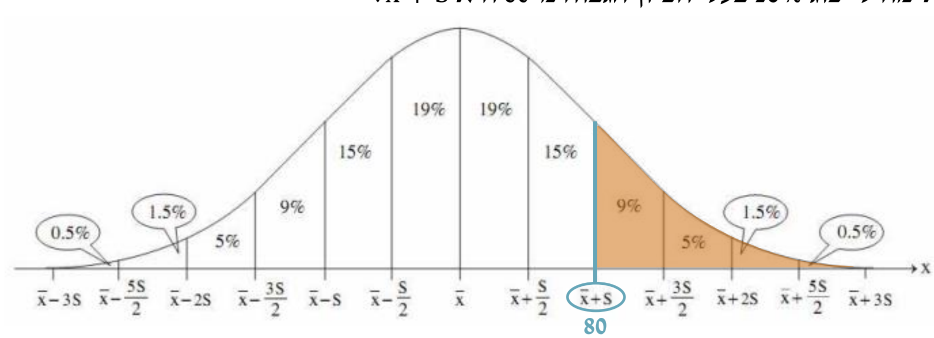


פתרון:

א. לפי הנתונים, ל-16% מהתלמידים ציון גבוה מ-80. נמצא את הנקודה המתאימה על גבי הגרף:

$$0.5\% + 1.5\% + 5\% + 9\% = 16\%$$

לכן, הנקודה בגרף המתאימה לייצוג 16% בעלי הציון הגבוה מ-80 היא $\bar{x} + S$:



נתון כי סטיית התקן היא 8. לפי הגרף, ניתן לראות שהציון 80 נמצא במרחק של סטיית תקן אחת מהממוצע:

$$80 - 8 = 72$$

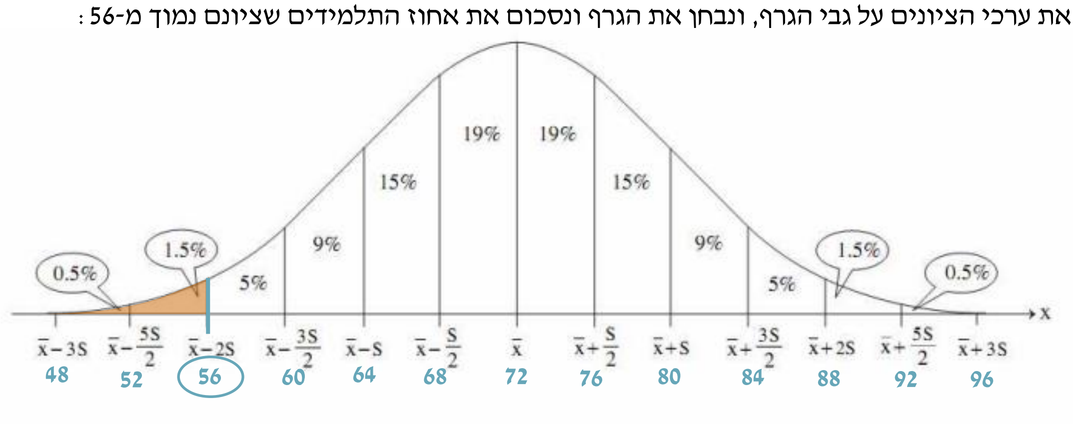
תשובה:

ממוצע הציונים של הנבחנים הוא 72

ב. לפי הנתונים, סטיית תקן אחת היא 8. לכן, חצי סטיית תקן היא 4.

נשלים את ערכי הציונים על גבי הגרף, ונבחן את הגרף ונסכום את אחוז התלמידים שציונם נמוך מ-56 :

:

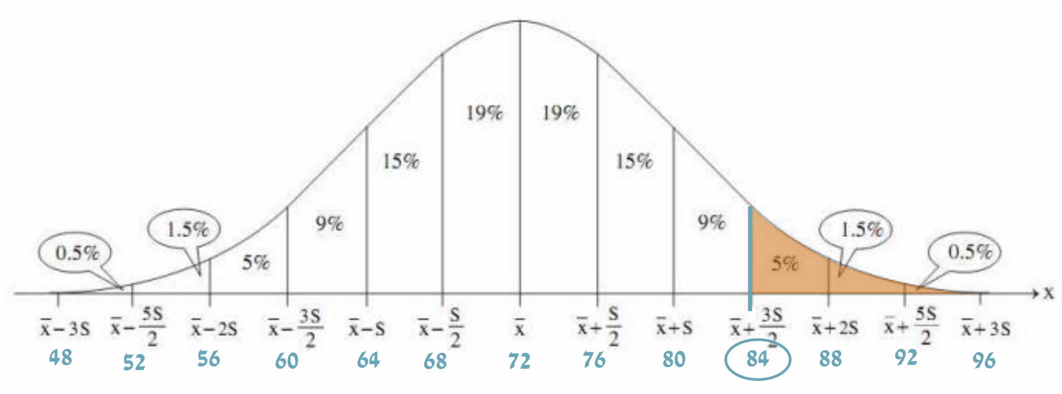


$$1.5\% + 0.5\% = 2\%$$

תשובה :

אחוז התלמידים שציונם נמוך מ-56 הוא 2%

ג. לפי הנתונים, הוחלט ש-7% מהתלמידים יקבלו תעודת הצטיינות. נשתמש בגרף כדי לבדוק מהו הציון המקנה תעודה :



לפי הגרף, הציון שמקנה תעודת הצטינות הוא ציון 84 ומעלה, ולכן, דביר אינו זכאי לקבל תעודת הצטינות, שכן ציונו נמוך יותר.

תשובה :

דביר לא יקבל תעודת הצטיינות