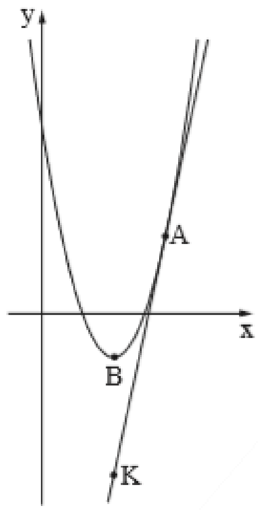
קיץ א 2018 – שאלון 035381

אלגברה



לפניך סרטוט של הפרבולה שמשוואתה היא: $y = x^2 - 7x + 10$

ושל הישר שמשוואתו היא: $y = 5x - 26$.

א. מצא את שיעורי קודקוד הפרבולה (הנקודה B בציור).

ב. מהו תחום העלייה של הפרבולה?

ג. מצא את שיעורי הנקודה המשותפת לפרבולה ולישר (הנקודה A בציור).

ד. K היא נקודה על הישר.

שיעור ה־ x של הנקודה K שווה לשיעור ה־ x של קודקוד הפרבולה.

מצא את שיעורי הנקודה K .

פתרון:

א. לפי הנתונים, נוסחת הפרבולה:

$$y = x^2 - 7x + 10$$

$a = 1$ $\quad$ $b = -7$ $\quad$ $c = 10$

נוסחת הקודקוד של הפרבולה:

$$x_{\text{קודקוד}} = \frac{-b}{2a}$$

נציב בהתאמה:

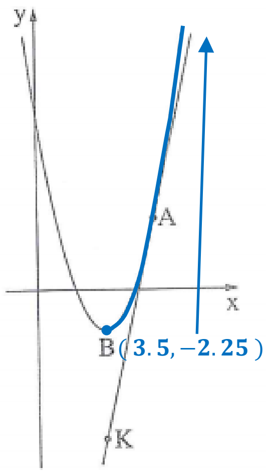
$$x_{\text{קודקוד}} = \frac{-(-7)}{2 \cdot 1} = 3.5$$

כעת, עלינו למצוא את שיעור ה-y של הנקודה ולכן נציב את שיעור ה-x שמצאנו במשוואת הפרבולה:

$$y = (3.5)^2 - 7 \cdot 3.5 + 10 = (-2.25)$$

תשובה:

שיעורי הקודקוד B: $(3.5, -2.25)$



ב. לפי הסרטוט, ניתן לראות שהחל מקודקוד הפרבולה הפונקציה עולה. מכאן שעבור כל ערך x הגדול משיעור x של הקודקוד הפרבולה עולה - עבור $3.5 < x$

תשובה :

תחום העלייה של הפרבולה : $3.5 < x$

ג. כדי למצוא את נקודת החיתוך של הפרבולה עם הישר עלינו להשוות בין משוואת הישר למשוואת הפרבולה :

$$y = x^2 - 7x + 10 \qquad y = 5x - 26$$

$$x^2 - 7x + 10 = 5x - 26$$

$$x^2 - 7x + 10 - 5x + 26 = 0$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$a = 1 \qquad b = 12 \qquad c = 36$

נציב בנוסחת השורשים :

$$x_{1,2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{12 + 0}{2} = 6$$

עד כה מצאנו את שיעור ה-x של הנקודה. כעת, נמצא את שיעור ה-y ולשם כך נציב $x = 6$ במשוואת הישר :

$$y = 5 \cdot 6 - 26 = 10$$

תשובה :

שיעורי נקודת החיתוך A : $(6 , 10)$

***הערה** : ניתן היה לפתור את התרגיל על ידי הצבת שיעור ה-x גם במשוואת הפרבולה.

ד. לפי הנתונים, שיעור ה-x של קודקוד K שווה לשיעור ה-x של קודקוד הפרבולה. בסעיף א׳ מצאנו ששיעור ה-x של קודקוד הפרבולה הוא $x = 3.5$, ולכן זה גם שיעור ה-x של נקודה K.

הנקודה K נמצאת על גבי הישר $y = 5x - 26$ ולכן כדי למצוא את שיעור ה-y שלה, נציב $x = 3.5$ במשוואת הישר :

$$y = 17.5 - 26 = -8.5$$

תשובה :

שיעורי הנקודה K : $(3.5 , -8.5)$

2. יוסף קנה טלוויזיה בתשלומים חודשיים, המהווים סדרה חשבונית.
בחודש הראשון שילם יוסף 99.5 שקלים.
בחודש הרביעי שילם יוסף 248 שקלים.
א. כמה שילם יוסף בחודש השני?

יוסף שילם על הטלוויזיה סך הכול 4,461 שקלים.
ב. בכמה תשלומים קנה יוסף את הטלוויזיה?

מרים קנתה טלוויזיה באותו מחיר, אך שילמה בארבעה תשלומים שווים.
ג. מה היה גובה כל אחד מן התשלומים ששילמה מרים?

פתרון:

א. לפי הנתונים, מדובר בסדרה חשבונית.

בחודש הראשון שילם יוסי 99.5 שקלים ← $a_1 = 99.5$.
בחודש הרביעי שילם יוסי 248 שקלים ← $a_4 = 248$.

נעזר בנוסחת האיבר הכללי ונציב את הנתונים עבור a_4:

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$
$$a_4 = a_1 + d(4-1)$$
$$248 = 99.5 + 3d \quad /-99.5$$
$$148.5 = 3d \quad /:3$$
$$d = 49.5$$

נזכיר, כי עלינו למצוא כמה שילם יוסי בחודש השני , כלומר עלינו לחשב את a_2:

$$a_2 = a_1 + d = 99.5 + 49.5 = 149$$

תשובה:

בחודש השני יוסי שילם 149 שקלים

ב. בסעיף זה עלינו למצוא את מספר התשלומים שיוסי שילם, כלומר את n. לפי הנתונים, יוסי שילם סך הכל 4,461 שקלים, וזהו בעצם סכום הסדרה, כלומר $S_n = 4{,}461$.

מצאנו בסעיף הקודם את הפרש הסדרה ← $d = 49.5$

נעזר בנוסחת סכום סדרה חשבונית ונציב את הנתונים:

$$S_n = \frac{n}{2}(2 \cdot a_1 + d(n-1))$$

$$4{,}461 = \frac{n}{2}[2 \cdot 99.5 \ + \ 49.5 \cdot (n-1)] \quad /\cdot 2$$

$$8{,}922 = n[2 \cdot 99.5 \ + \ 49.5 \cdot (n-1)]$$

$$8{,}922 = n(199 \ + \ 49.5n - 49.5)$$

$$8{,}922 = n(149.5 \ + \ 49.5n)$$

$$8{,}922 = 149.5n + 49.5n^2 \quad /-8{,}922$$

$$0 = 49.5n^2 + 149.5n - 8{,}922$$

קיבלנו משוואה ריבועית, ולכן נפתור אותה באמצעות נוסחת השורשים:

$$0 = 49.5n^2 + 149.5n - 8{,}922$$

$a = 49.5 \quad b = 149.5 \quad c = -8{,}922$

$$x_{1,2} = \frac{-(149.5) \pm \sqrt{(149.5)^2 - 4 \cdot 49.5 \cdot (-8{,}922)}}{2 \cdot 49.5}$$

$$x_{1,2} = \frac{-149.5 \pm 1337.5}{99}$$

$$x_1 = \frac{-149.5 + 1337.5}{99} = 12 \qquad x_2 = \frac{-149.5 - 1337.5}{99} = -15.02$$

**n חייב להיות מספר חיובי ושלם – לא ייתכן שיוסי שילם מספר שלילי/שבר של תשלומים ולכן תוצאה זו נפסלת

תשובה:

יוסי קנה את הטלוויזיה ב-12 תשלומים

ג. מרים שילמה מחיר זהה למחיר ששילם יוסי על הטלוויזיה, כלומר 4,461 שקלים. אנחנו יודעים שהיא קנתה את הטלוויזיה ב-4 תשלומים שווים, לכן נחלק את הסכום ב-4:

$$4{,}461 \div 4 = 1115.25$$

תשובה:

גובה כל אחד מהתשלומים הוא 1,115.25 שקלים

3. יואב קיבל הלוואה מן הבנק על סך 20,000 שקלים, בריבית שנתית של 3%.

א. חשֵב את החוב של יואב לבנק לאחר שנה.

ב. חשֵב את החוב של יואב לבנק בתום 8 השנים הראשונות.

בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

8 שנים לאחר שקיבל יואב את ההלוואה מן הבנק, נתנה לו סבתו 30,000 שקלים במתנה.

הוא השתמש בחלק מן הכסף שקיבל במתנה כדי להחזיר את החוב (שמצאת בסעיף ב).

ג. כמה כסף נשאר ליואב לאחר סגירת החוב בבנק?

יואב השקיע את הסכום שנשאר בידו לאחר סגירת החוב בתוכנית חיסכון בעלת ריבית שנתית קבועה.

לאחר שנתיים נוספות היו ברשותו 4,758.36 שקלים.

ד. מה הייתה הריבית השנתית של תוכנית החיסכון?

פתרון:

א. נשים לב ששאלה זאת עוסקת בגידול ודעיכה. נתון שהסכום גדל כל שנה ב-3% , כלומר :

$$q = \frac{100+p}{100} = \frac{100+3}{100} = 1.03$$

מצאנו את שיעור הגדילה ← $q = 1.03$

לפי הנתונים, יואב קיבל הלוואה מהבנק בסך 20,000 שקלים ← $M_0 = 20{,}000$

אנו מחפשים את חובו של יואב לבנק לאחר שנה ← $t = 1$

נציב את הנתונים בנוסחה :

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$M_1 = 20{,}000 \cdot 1.03^1$$

$$M_1 = 20{,}600$$

תשובה :

החוב של יואב לבנק לאחר שנה הוא 20,600 שקלים

ב. עלינו לחשב את החוב של יואב ב-8 השנים הראשונות ← $t = 8$.

נציב את הנתונים בנוסחה :

$$M_8 = 20{,}000 \cdot 1.03^8$$

$$M_8 = 25{,}335.40$$

תשובה :

החוב של יואב לאחר 8 שנים הוא 25,335.40 שקלים

ג. לפי סעיף קודם, החוב של יואב לאחר 8 שנים הוא 25,335.40 שקלים. סבתא של יואב נתנה לו 30,000, לכן הסכום שנותר לו:

$$30{,}000 - 25{,}335.40 = 4{,}664.6$$

תשובה:

הסכום שנשאר ליואב לאחר סגירת החוב הוא 4,664.6 שקלים

ד. נמצא את הנתונים החדשים –

הסכום שהשקיע יואב בחסכון הוא 4664.6 שקלים ← $M_0 = 4664.6$

לאחר שנתיים היו לו 4758.36 שקלים ← $M_2 = 4758.36$, $t = 2$

נעזר בנוסחה ונמצא את שיעור הגדילה q:

$$M_2 = M_0 \cdot q^2$$

$$4758.36 = 4664.6 \cdot q^2 \quad / \div 4664.6$$

$$1.02 = q^2 \quad / \sqrt{}$$

$$q = 1.01$$

מכיוון שנשאלנו על הריבית בלבד, ולא על שיעור הגדילה, נעזר בנוסחה ונמיר לאחוזים:

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

$$1.01 = \frac{100 + p}{100} \quad / \cdot 100$$

$$101 = 100 + p \quad / -100$$

$$p = 1$$

תשובה:

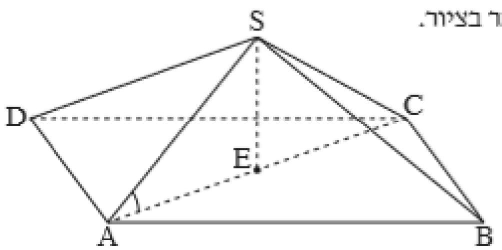
הריבית השנתית של תכנית החיסכון היא 1%

<u>טריגונומטריה</u>

4. SABCD היא פירמידה ישרה ומרובעת שבסיסה הוא מלבן, כמתואר בציור.

SE הוא גובה בפירמידה.

נתון: 11 ס"מ $=\text{AD}$, 20 ס"מ $=\text{AB}$, 7 ס"מ $=\text{SE}$.



א. חשב את אורך אלכסון הבסיס של הפירמידה.

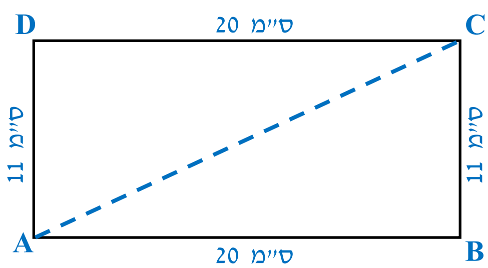
ב. חשב את האורך של מקצוע צדדי של הפירמידה.

ג. חשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי של הפירמידה ובין בסיס הפירמידה.

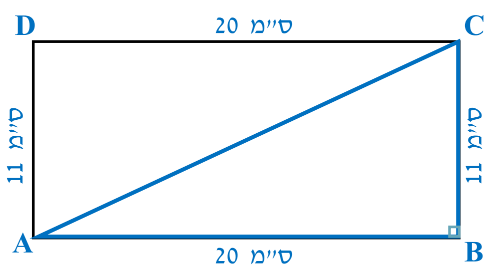
בתשובותיך הַשְׁאֵר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

פתרון:

א. נתבונן ב"מבט על" על בסיס הפירמידה:



בסעיף זה עלינו לחשב את אורך אלכסון הבסיס. לצורך כך, נעזר במשפט פתגורס במשולש ישר הזווית ABC:



$$BC^2 + AB^2 = AC^2$$

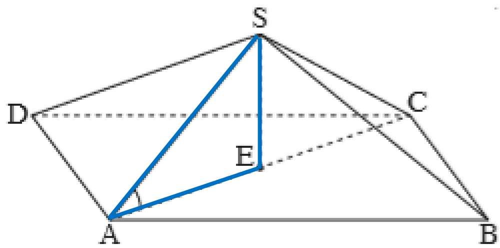
$$11^2 + 20^2 = AC^2$$

$$521 = AC^2 \quad /\sqrt{}$$

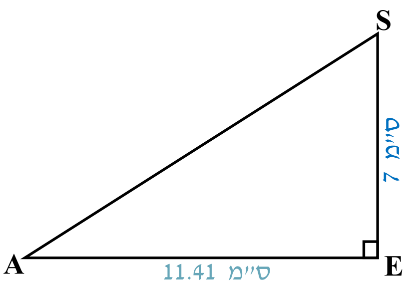
$$AC = 22.82$$

תשובה:

אורך אלכסון בסיס הפרמידה הוא 22.82 ס"מ



ב. בסעיף זה התבקשנו לחשב את אורך המקצוע הצדדי בפירמידה.
נחשב את מקצוע SA, ולשם כך נתבונן במשולש SEA במבט צד:



לפי הנתונים, הגובה במשולש SE = 7 ס"מ ומחצית האלכסון שמצאנו בסעיף א' הוא 11.41 ס"מ.

נעזר במשפט פתגורס במשולש ישר זווית SEA ונמצא את AS:

$$SE^2 + AE^2 = SA^2$$

$$7^2 + 11.41^2 = \mathrm{SA}^2$$

$$179.18 = \mathrm{SA}^2 \quad /\sqrt{}$$

$$\mathrm{SA} = 13.38$$

תשובה:

אורך מקצוע צדדי של פירמידה הוא 13.38 ס"מ

ג. עלינו לחשב את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי של הפירמידה לבסיס הפירמידה, כלומר את זווית $\sphericalangle$SAE.

בסעיפים קודמים ראינו: AE = 11.41 ס"מ היא הצלע ליד הזווית, SE = 7 ס"מ צלע מול הזווית ולכן נעזר בנוסחת הטנגנס ונציב את הנתונים:

$$\tan \mathrm{SAE} = \frac{\mathrm{SE}}{\mathrm{AE}}$$

$$\tan \mathrm{SAE} = \frac{7}{11.41}$$

$$\tan \mathrm{SAE} = \frac{7}{11.41} \quad / \tan^{-1}(7:11.41)$$

$$\sphericalangle \mathrm{SAE} = 31.52°$$

תשובה:

הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא 31.51°

הסתברות וסטטיסטיקה

5. הציון הממוצע של תלמיד ב־ 5 מבחנים הוא 77 .

התלמיד נבחן במבחן נוסף. הוא רוצה שממוצע הציונים שלו ב־ 6 המבחנים יהיה 80 .

א. כדי שהממוצע של 6 המבחנים יהיה 80 , האם הציון של התלמיד במבחן השישי צריך להיות גדול מן הממוצע של 5 המבחנים הראשונים, קטן ממנו או שווה לו?

ב. מה צריך להיות ציונו במבחן השישי, כדי שממוצע הציונים שלו ב־ 6 המבחנים יהיה 80 ? נמק.

פתרון:

א. אם התלמיד רוצה שממוצע הציונים שלו יהיה גבוה יותר, אז עליו לקבל ציונים גבוהים יותר. במילים אחרות, הציון של התלמיד במבחן השישי צריך להיות גבוה יותר מהממוצע שיש לו כעת.

תשובה:

הציון שלו במבחן השישי צריך להיות גבוה יותר ממוצע הציונים שלו כעת.

ב. נעזר בטבלת שכיחויות:

	5 מבחנים ראשונים	המבחן השישי
ציון = x	77	x
שכיחות = f	5	1

נזכיר, כי התלמיד רוצה להגיע לממוצע 80. כלומר:

$$\text{ממוצע} = \frac{\text{סך כל הציונים}}{\text{כמות מבחנים}}$$

$$80 = \frac{77 \cdot 5 + x}{6} \quad / \cdot 6$$

$$80 \cdot 6 = 385 + x \quad / -385$$

$$480 - 385 = x$$

$$95 = x$$

תשובה:

התלמיד צריך לקבל במבחן השישי ציון של 95 כדי להעלות את הממוצע שלו ל-80

6. בבית ספר שיש בו 600 תלמידים, נמדד גובהם של כל התלמידים.

נמצא כי הגבהים של תלמידי בית הספר מתפלגים נורמלית.

הגובה הממוצע של תלמידי בית הספר הוא 162 ס"מ.

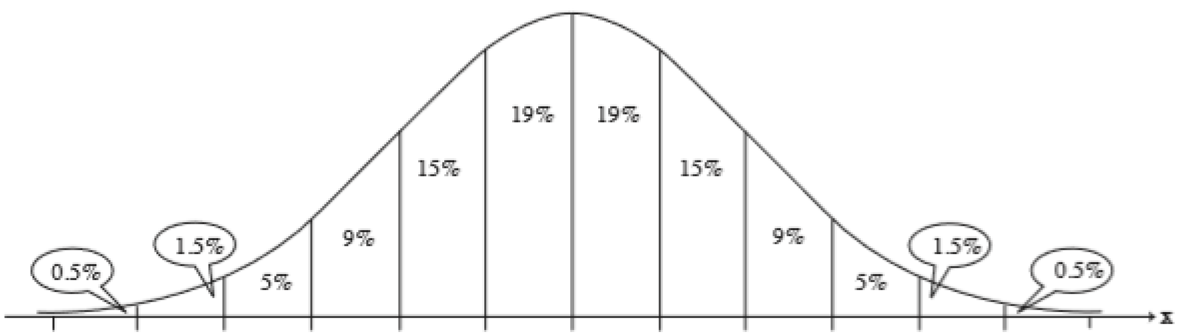
הגובה של 7% מן התלמידים קטן מ- 156 ס"מ.

א. מצא את סטיית התקן של גובה התלמידים בבית הספר.

ב. מהו אחוז תלמידי בית הספר שגובהם בין 166 ס"מ ובין 172 ס"מ?

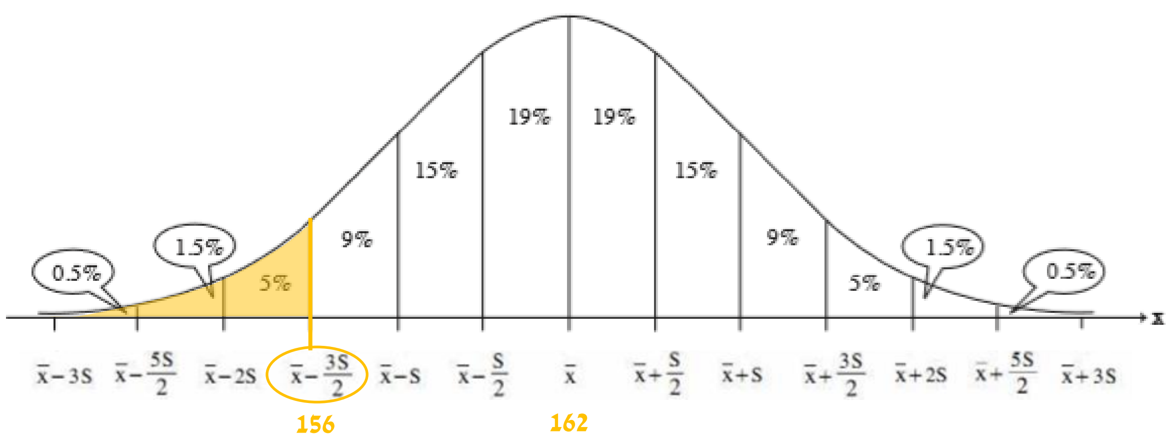
ג. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, כמה תלמידים שגובהם בין 166 ס"מ ובין 172 ס"מ יש בבית הספר?

לפניך גרף ההתפלגות הנורמלית מִדף הנוסחאות. היעזר בו בחישוביך.



פתרון:

הגובה הממוצע בבית הספר הוא 162 ס"מ, ונתון ש-7% מהתלמידים נמוכים מ-156 ס"מ. נשלים את הנתונים על גבי הגרף:



א. בסעיף זה עלינו למצוא את סטיית התקן. נוכל לראות כי כין בין 156 לבין 162 יש 6 ס"מ שמהווים 3 חצאי סטיות תקן

נבדוק לכמה שווה מחצית סטיית תקן:

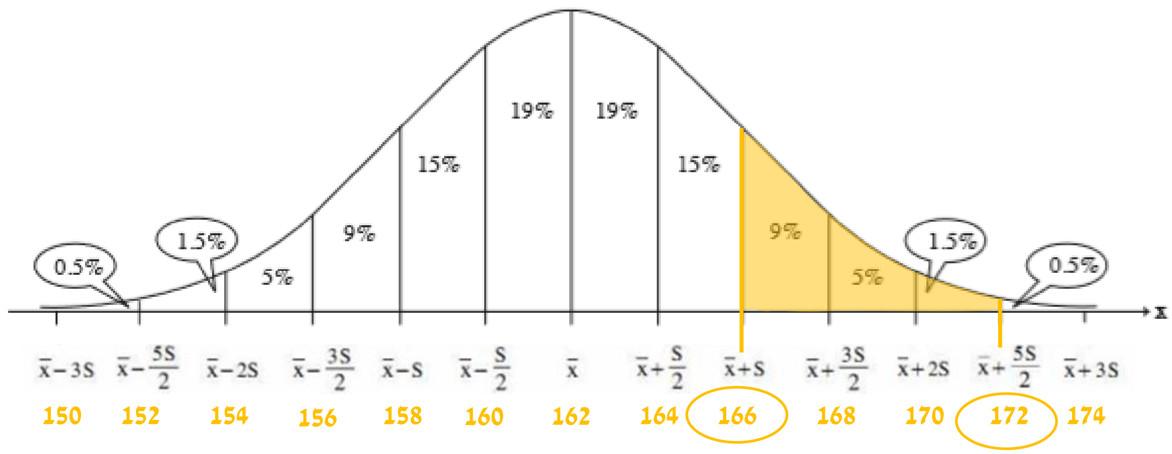
$$\frac{6}{3}=2$$

כלומר, סטיית תקן אחת היא: $2\cdot 2=4$

תשובה:

סטיית תקן אחת שווה ל-4 ס"מ

ב. נשלים את הנתונים על גרף ההתפלגות:



נסכום את אחוז התלמידים שגובהם בין 166 ל-172 ס"מ:

$$9\% + 5\% + 1.5\% = 15.5\%$$

תשובה:

אחוז תלמידי בית הספר שגובהם הוא בין 166-172 ס"מ הוא 15.5%

ג. בבית הספר יש 600 תלמידים. בסעיף הקודם, מצאנו שאחוז התלמידים שגובהם בין 166 ל-172 ס"מ הוא 15.5%.

כלומר, כדי לחשב את כמות התלמידים בגבהים אלו עלינו לחשב כמה הם 15.5% מתוך 600:

$$\frac{15.5}{100} \cdot 600 = 93$$

תשובה:

יש 93 תלמידים בבית הספר שגובהם בין 166 ל-172 ס"מ