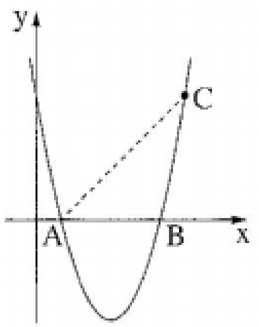
חורף 2019 – שאלון 035381

<u>אלגברה</u>



1. הפרבולה $y = x^2 - 6x + 5$ חותכת את ציר ה-x בנקודות A ו-,B כמתואר בציור שלפניך.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-.B

ב. רשום את תחומי החיוביות של הפרבולה.

נקודה C נמצאת על הפרבולה ושיעור ה-x שלה הוא 6.

ג. מצא את שיעור ה-y של הנקודה .C

ד. **(1)** מצא את אורך הקטע .AB

(2) חשב את שטח המשולש.

פתרון:

א. הנקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה-x, ומכאן ששיעור ה-y של כל אחת מהן הוא 0.
תחילה, נציב בפונקציית הפרבולה $y = 0$:

$$0 = x^2 - 6x + 5$$

a = 1 b = -6 c = 5

כעת, נעזר בנוסחת השורשים ונחלץ את שני הפתרונות האפשריים :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2 \cdot 1}$$

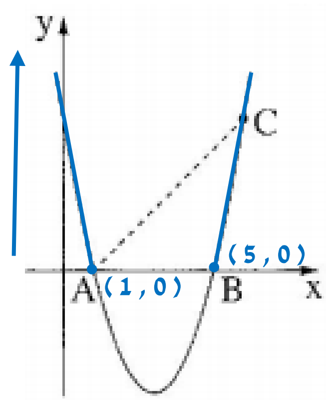
$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{6 + 4}{2} \qquad x_2 = \frac{6 - 4}{2}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 1$$

תשובה :

שיעורי הנקודות A, B : $A(1,0)$, $B(5,0)$



ב. בסעיף זה התבקשנו למצוא את תחומי החיוביות של הפונקציה. תחומי החיוביות הם התחומים שבהם שיעורי ה-y של הפונקציה חיוביים, או במילים אחרות – תחומים שבהם **הפונקציה נמצאת מעל לציר ה-y**.

נבחן את הגרף ונראה הוא חותך את ציר ה-x בנקודות A ו-B, וכי הפונקציה נמצאת מעל לציר ה-x כל עוד שיעור ה-x גדול מ-5 או קטן מ-1.

תשובה:

תחומי החיוביות של הפונקציה: $5 < x$ **או** $x < 1$

ג. נתונה נקודה C ששיעור ה-x שלה הוא 6. כדי לחשב את שיעור ה-y של הנקודה נציב את שיעור ה-x בפונקציה:

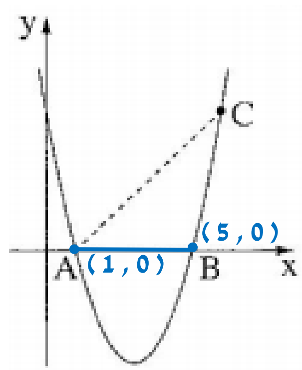
$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = 6^2 - 6 \cdot 6 + 5$$

$$y = 5$$

תשובה:

שיעור ה-y של הנקודה C הוא 5



ד. (1) נשים לב ש-AB הוא קטע המונח על גבי ציר ה-x, ולכן נוכל לחשב את המרחק בין הנקודות A ו-B בעזרת חיסור שיעור ה-x הקטן של נקודה A משיעור ה-x הגדול של נקודה B:

$$AB = x_B - x_A$$

$$Bh = 5 - 1$$

$$Bh = 4$$

תשובה:

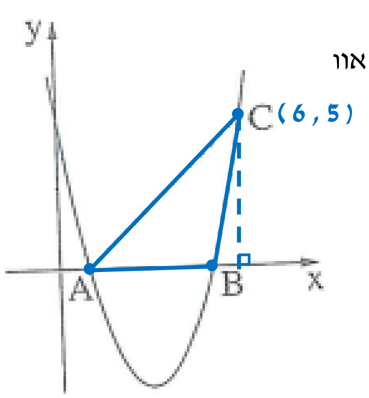
המרחק בין נקודה A לנקודה B הוא 4 יחידות

(2) נעזר בנוסחת שטח משולש:

$$S_{\text{משולש}} = \frac{\text{צלע} \cdot h}{2}$$

בסעיף הקודם מצאנו את אורך הצלע AB. נמתח אליה גובה מקודקוד C:

הגובה מקודקוד C מגיע לציר ה-x ומקביל לציר ה-y, ולכן אורכו שווה לשיעור ה-y של נקודה C אוו



$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot y_C}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 5}{2}$$

$$S_{ABC} = 10$$

תשובה:

שטח משולש ABC הוא 10 יח"ר

2. ספורטאי הלך במשך 6 שעות ברציפות.

בכל בשעה שעה הוא הלך מרחק השווה $\frac{5}{6}$ מן המרחק שהלך בשעה הקודמת.

בשעה השלישית הוא הלך 5,400 מטר.

א. חשב את המרחק שהלך הספורטאי בשעה הראשונה.

ב. חשב את המרחק שהלך הספורטאי במשך 6 שעות.

פתרון:

א. נתון שבכל שעה שחולפת הספורטאי הולך מרחק השווה ל- $\frac{5}{6}$ מהמרחק שהלך בשעה הקודמת, כלומר המרחק שהוא עובר הולך **וקטן**. המרחק שהספורטאי עובר קטן **פי** $\frac{5}{6}$, ולכן מדובר ב**סדרה הנדסית** בה בכל שעה המרחק קטן במנה קבועה $\leftarrow$ $q = \frac{5}{6}$

נעזר בנתון $a_3 = 5{,}400$ ונציב את הנתונים בנוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$5{,}400 = a_1 \cdot \frac{5}{6}^2$$

$$5{,}400 = a_1 \cdot \frac{25}{36} \quad / \div \frac{25}{36}$$

$$a_1 = 7{,}776$$

תשובה:

בשעה הראשונה עבר הספורטאי 7,776 מטרים

ב. בסעיף זה התבקשנו לחשב את המרחק שעבר הספורטאי ב-6 השעות הראשונות.

נעזר בנוסחת סכום סדרה הנדסית:

$$S_n = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_6 = \frac{7{,}776 \cdot \left[\left(\frac{5}{6}\right)^6 - 1\right]}{\frac{5}{6} - 1}$$

$$S_6 = \frac{\frac{-31{,}031}{6}}{\frac{-1}{6}} = 31{,}031$$

תשובה:

המרחק שהספורטאי עבר במשך 6 שעות הוא 31,031 מטרים

3. המחיר של מכונית א' היום הוא 140,000 שקלים.
המחיר שלה יורד מדי שנה ב-12%.
א. מצא מה יהיה המחיר של מכונית א' בעוד שנה ובעוד שנתיים.
המחיר של מכונית ב' יורד מדי שנה באחוז קבוע. מחיר מכונית ב' היום הוא 110,000 שקלים ובעוד שנה יהיה 101,200 שקלים.
ב. מצא בכמה אחוזים יורד מדי שנה המחיר של מכונית ב'.
ג. איזו מכונית, א' או ב', תהיה יקרה יותר בעוד 5 שנים מהיום?

פתרון:

א. המחיר של מכונית א' הוא 140,000, והוא **יורד** בכל שבוע ב-12%. נחשב את קצב ה**דעיכה** q :

$$q = \frac{100-12}{100} = 0.88$$

נתונים :

- המחיר ההתחלתי ← $M_0 = 140,000$
- שיעור הדעיכה ← $q = 0.88$
- הזמן – שנה ß $t = 1$

נעזר בנוסחה על מנת לחשב את הערך M_1 :

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$M_1 = 140,000 \cdot 0.88^1$$

$$M_1 = 123,200$$

נחשב באותו אופן את המחיר בעוד שנתיים :

$$M_2 = 140,000 \cdot 0.88^2$$

$$M_2 = 108,416$$

תשובה :

מחיר המכונית בעוד שנה יהיה 123,200 שקלים, ובעוד שנתיים המחיר יהיה 108,416 שקלים

ב. נתונים:

- מחיר מכונית ב' כיום ← $M_0 = 110{,}000$
- מחיר מכונית ב' בעוד שנה ← $M_1 = 101{,}200$
- הזמן שחלף הוא שנה ← $t = 1$

נציב את הנתונים בנוסחה:

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$101{,}200 = 110{,}000 \cdot q^1 \ / \div 110{,}000$$

$$q = 0.92$$

כלומר, המחיר של המכונית יורד מידי שנה ל-92% מסכום מחירה המקורי. נחסר כדי למצוא את האחוז שבו מחיר המכונית יורד בכל שנה:

$$100\% - 92\% = 8\%$$

תשובה:

מחיר מכונית ב' יורד כל שנה ב-8%.

ג. נמצא את המחירים של מכונית א' ושל מכונית ב' בעוד 5 שנים, ונשווה ביניהם:

מכונית א':

- $M_0 = 140{,}000$
- $q = 0.88$
- $t = 5$

$$M_{5א} = M_0 \cdot q^5$$

$$M_{5א} = 140{,}000 \cdot 0.88^5 = 73{,}882.46$$

מכונית ב':

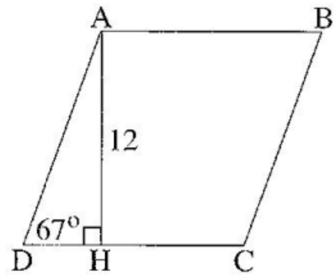
- $M_0 = 110{,}000$
- $q = 0.92$
- $t = 5$

$$M_{5ב} = M_0 \cdot q^5$$

$$M_{5ב} = 110{,}000 \cdot 0.92^5 = 72{,}498.96$$

תשובה:

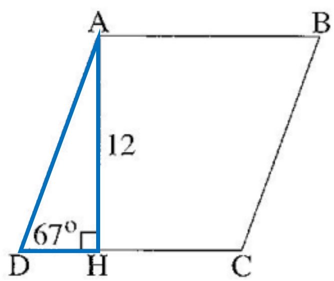
בעוד 5 שנים, מחירה של מכונית א' יהיה יקר יותר ממחירה של מכונית ב'



טריגונומטריה

4. במעוין ABCD אורך הגובה AH לצלע DC הוא 12 ס״מ.
גודל הזווית החדה של המעוין הוא 67° (ראה ציור).
א. חשב את אורך צלע המעוין.
ב. חשב את היקף המעוין.
ג. חשב את שטח המשולש AHC.

פתרון:



א. נתמקד במשולש ישר זווית AHD:

כדי למצוא את אורך צלע המעוין, נשתמש בנוסחת הסינוס ונמצא את AD, שהוא היתר במשולש ADH. נתונה לנו הזווית ADH∢ ואורך הניצב AH שמולה, ולכן נשתמש בנוסחת הסינוס:

$$\sin ADH = \frac{AH}{AD}$$

$$\sin 67 = \frac{12}{AD} \quad /\cdot AD$$

$$AD \cdot \sin 67 = 12 \quad /\div \sin 67$$

$$AD = \frac{12}{\sin 67} = 13.036 \text{ ס"מ}$$

תשובה:

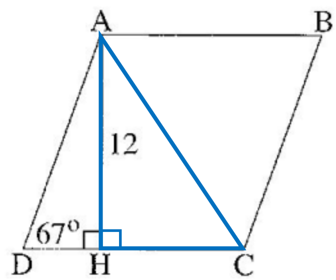
אורכה של צלע המעוין ABCD הוא 13.036 ס״מ

ב. מכיוון שצלעות המעוין שוות בגודלן, וההיקפו שווה לסכומן, נכפיל את אורך הצלע שמצאנו בסעיף א׳ פי 4:

$$13.036 \cdot 4 = 52.144$$

תשובה:

היקף המעוין ABCD הוא 52.144 ס״מ



ג. נתבונן במשולש AHC:

כדי לחשב שטח משולש אנו זקוקים לגובה ולצלע, או במקרה של משולש ישר זווית אנו זקוקים לשני הניצבים. אורכו של הניצב AH נתון לנו והוא 12 ס"מ. אורכו של הניצב HC לא נתון לנו, אולם נוכל למצוא אותו בעזרת חיסור קטעים:

$$HC = DC - DH$$

הקטע DC הוא צלע במעוין ABCD וחישבנו בסעיף א' שאורכו 13.036 . אורכו של הקטע DH ניתן לחישוב בעזרת נוסחת הטנגנס במשולש ישר הזווית ADH:

$$\tan ADH = \frac{AH}{DH}$$

$$\tan 67 = \frac{12}{DH} \quad / \cdot DH$$

$$DH \cdot \tan 67 = 12 \quad / \div \tan 67$$

$$DH = \frac{12}{\tan 67}$$

$$DH = 5.094$$

כעת, נחזור לחיסור הצלעות לצורך מציאת בסיס המשולש:

$$HC = DC - DH$$

$$HC = 13.036 - 5.094 = 7.942$$

כעת ניגש לנוסחה לחישוב שטח המשולש ישר הזווית AHC:

$$S_{\text{משולש}} = \frac{\text{ניצב} \cdot \text{ניצב}}{2}$$

$$S_{\text{משולש}} = \frac{7.93 \cdot 12}{2} = 47.65$$

תשובה:

שטח המשולש AHC הוא 47.65 סמ"ר

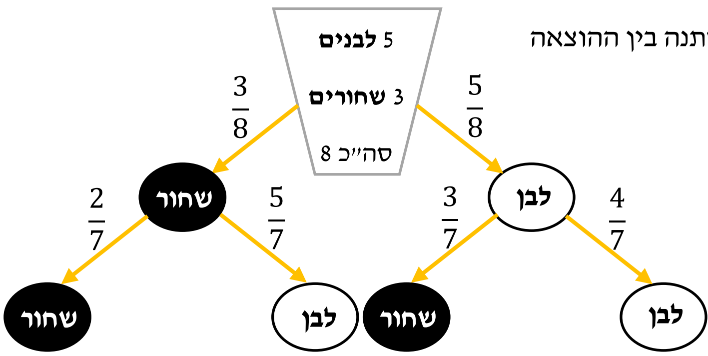
<u>הסתברות וסטטיסטיקה</u>

5. בכד היו 5 כדורים לבנים ו-3 כדורים שחורים.
הוציאו מן הכד באקראי כדור אחד <u>והשאירו אותו בחוץ.</u>
ערבבו את שאר הכדורים שבכד והוציאו באקראי כדור נוסף.
א. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוציאו מן הכד הוא לבן והכדור השני שהוציאו הוא שחור?
ב. מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו מן הכד הם שחורים?
ג. מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוציאו מן הכד הם באותו הצבע?

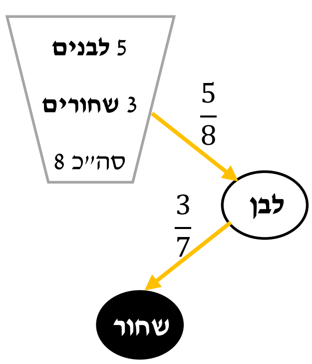
פתרון:

ראשית כל נצייר דיאגרמת עץ המתארת את ההסתברות להוציא כדור בצבע מסויים מהכד. ליד כל חץ נרשום את מספר הכדורים בצבע אותו הוצאנו, מתוך מספר הכדורים שבכד בסה"כ:

נשים לב שההוצאה היא **ללא החזרה, ובהתאמה ההסתברות משתנה בין ההוצאה הראשונה להוצאה השניה.



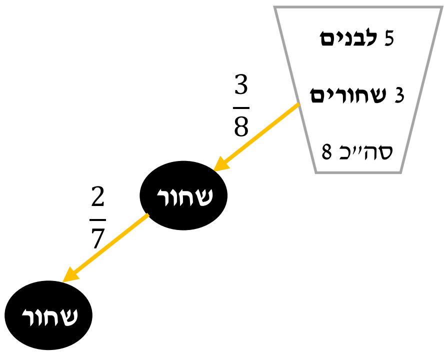
א. בסעיף זה התבקשנו לחשב את ההסתברות שהכדור שהוצא ראשון הוא לבן והשני הוא שחור. נבחן את המסלול המתאים בדיאגרמה, ונכפול בין השברים כדי להגיע להסתברות:



$$P(\text{לבן, שחור}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

תשובה:

ההסתברות שהכדור הראשון שיוצא יהיה לבן ושהכדור השני יהיה שחור היא $\frac{15}{56}$



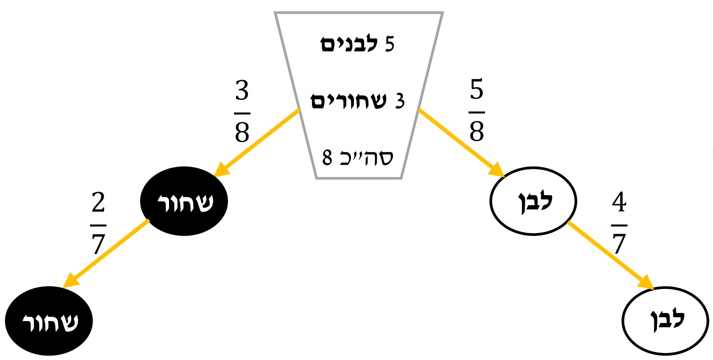
ב. בסעיף זה התבקשנו לחשב את ההסתברות ששני הכדורים שחורים. נבחן את המסלול המתאים בדיאגרמה:

$$P(\text{שחור, שחור}) = \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

תשובה:

ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו מן הכד יהיו שחורים היא $\frac{3}{28}$

ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את ההסתברות ששני הכדורים יהיו באותו צבע, כלומר או ששניהם שחורים, או ששניהם לבנים. משמעות הדבר שעלינו **לסכום** שני מסלולים אפשריים על גבי הדיאגרמה:



תחילה, נחשב את ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו לבנים:

$$P(\text{לבן, לבן}) = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

בסעיף ב' מצאנו שההסתברות ששני הכדורים יהיו שחורים היא $\frac{3}{28}$.

כעת, נחבר בין ההסתברויות שמצאנו:

$$P(\text{אותו הצבע}) = P(\text{לבן, לבן}) + P(\text{שחור, שחור})$$

$$P(\text{אותו הצבע}) = \frac{5}{14} + \frac{3}{28}$$

$$\frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}$$

תשובה:

ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו מן הכד יהיו באותו הצבע היא $\frac{13}{28}$

6. משקלן של ביצים בלול תרנגולות מתפלג נורמלית עם ממוצע של 62 גרם.

ביצה שמשקלה מעל 68 גרם מוגדרת כבדה. 16% מכלל הביצים בלול הן כבדות.

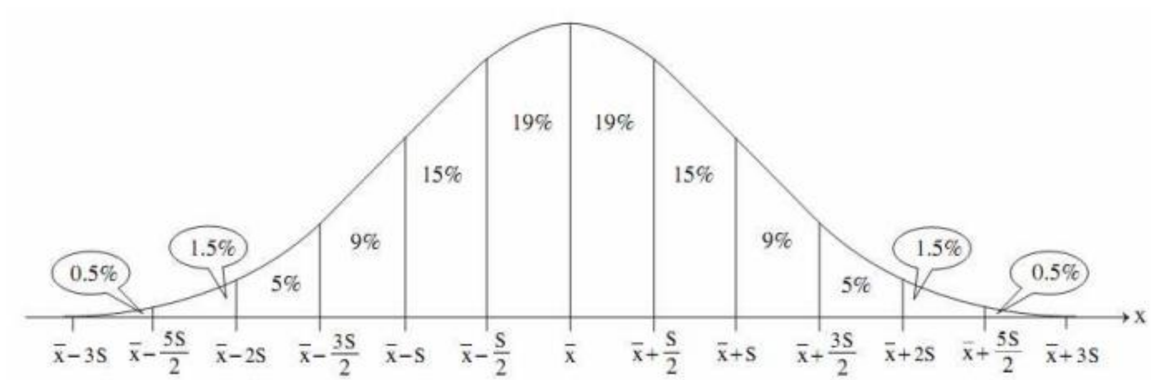
א. מצא מהי סטיית התקן של התפלגות משקל הביצים בלול.

ב. מצא מהי ההסתברות שמשקל ביצה שנבחרה באקראי מן הביצים בלול הוא פחות מ-56 גרם.

ג. נתון כי בלול יש 160 ביצים שמשקלן פחות מ-56 גרם.

על פי גרף ההתפלגות הנורמלית, כמה ביצים יש בלול סך הכול?

לפניך גרף ההתפלגות הנורמלית מדף הנוסחאות. היעזר בו בחישוביך.

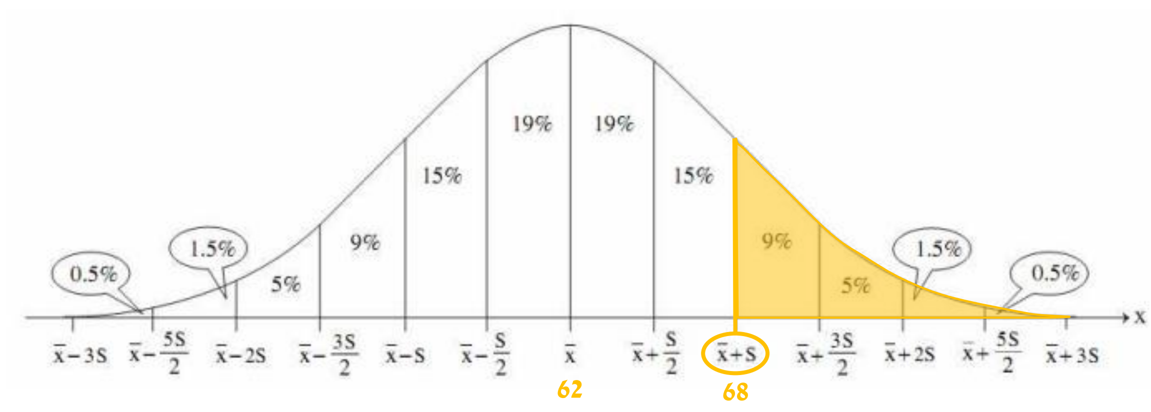


פתרון:

א. לפי הנתונים, 16% מכלל הביצים נחשבות כבדות. נמצא את הנקודה המתאימה על גבי הגרף:

$$0.5\% + 1.5\% + 5\% + 9\% = 16\%$$

לכן, הנקודה בגרף המתאימה לייצוג 16% הגבוהים ביותר היא $\bar{x} + S$, שמוגדרת כנקודה לביצה במשקל 68 גרם:



בעזרת הגרף נחשב את סטיית התקן:

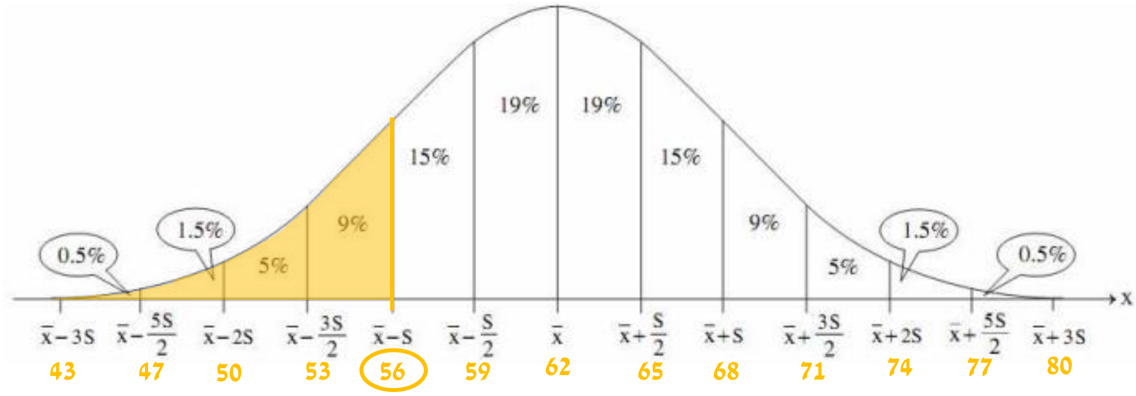
$$68 - 62 = 6$$

תשובה:

$\boxed{\text{סטיית התקן היא 6 גרם}}$

ב. לפי הסעיף הקודם, סטיית התקן היא 6 גרם. לכן, מחצית סטיית תקן היא 3 גרם.

נוסיף את ערכי המשקלים על גרף סטיית התקן, ונבחן מהו אחוז הביצים שמשקלן נמוך מ-56 גרם:



לפי הגרף אחוז הביצים שמשקלן נמוך מ-56 גרם הוא 16%:

$$0.05\% + 1.5\% + 5\% + 9\% = 16\%$$

מצאנו אם כן שההסתברות לבחור ביצה שמשקלה הוא נמוך מ-56 גרם:

$$P(\text{משקל הביצה שנבחרה נמוך מ} - 56 \text{ גרם}) = 16\%$$

$$P(\text{משקל הביצה שנבחרה נמוך מ} - 56 \text{ גרם}) = \frac{16}{100} = 0.16$$

תשובה:

ההסתברות לבחור ביצה שמשקלה נמוך מ-56 גרם היא 0.16

ג. עלינו לחשב את סך הביצים בלול. ידוע לנו כי מספר הביצים בלול שמשקלן נמוך מ-56 גרם הוא 160, ובסעיף הקודם מצאנו שמדובר ב-16% מכלל הביצים. נציב במקום סך הביצים בלול את הנעלם x:

$$16\% \text{ מסך הביצים} = 160 = \text{מספר הביצים שמשקלן נמוך מ} - 56 \text{ גרם}$$

$$160 = x \cdot 16\%$$

$$160 = x \cdot \frac{16}{100} \quad / \div \frac{16}{100}$$

$$x = 1{,}000$$

תשובה:

בלול יש 1,000 ביצים