מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)	(3)	(3)	(2)	(3)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(1)	(4)	(2)	(2)	(1)	(4)	(1)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - גיאומטריה - ישרים מקבילים

השאלה:

בסרטוט שלפניכם a ו-b הם ישרים מקבילים. לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, מהו x?

פתרון:

תובנת מפתח:

כאשר ישר חותך שני ישרים מקבילים, נוצרות זוויות מתאימות שוות וזוויות סמוכות המשלימות ל-180°.

שלב 1: מציאת הזווית מעל 130°

הזווית 130° והזווית שמעליה על הישר a הן זוויות סמוכות על ישר.

לכן הזווית מעל 130° היא: $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

שלב 2: זיהוי זוויות מתאימות

הזווית 50° שמצאנו היא **זווית מתאימה** לזווית הימנית של המשולש (כי a ו-b מקבילים).

לכן הזווית הימנית במשולש שווה ל-50°.

שלב 3: מציאת הזווית הפנימית ליד 170°

הזווית הפנימית של המשולש הסמוכה ל-170° היא: $180^\circ - 170^\circ = 10^\circ$

שלב 4: חישוב x

עכשיו יש לנו משולש עם שתי זוויות ידועות:

זווית ימנית: 50°

זווית שמאלית: 10°

זווית x (סכום זוויות במשולש = 180°):

$x = 180^\circ - 50^\circ - 10^\circ = 120^\circ$

התשובה: (2)

שאלה 2 - אלגברה - ערך מוחלט

השאלה:

נתון: $|3| - |-5| + |-12| - a = 16$

מהו a?

פתרון:

תזכורת:

ערך מוחלט של מספר הוא תמיד חיובי (או אפס). למשל: $|-5| = 5$

שלב 1: חישוב הערכים המוחלטים

$|3| = 3$
$|-5| = 5$
$|-12| = 12$

שלב 2: הצבה במשוואה

$3 - 5 + 12 - a = 16$

שלב 3: פישוט ופתרון

$10 - a = 16$
$-a = 6$
$a = -6$

התשובה: (3)

שאלה 3 - אלגברה - חזקות ושברים

השאלה:

נפח הדיו בעט נובע מלא הוא x סמ"ק (x שלם וחיובי).
לשם כתיבת אות אחת דרושים $\frac{1}{x^2}$ סמ"ק דיו.
כמה אותיות אפשר לכתוב בעט נובע מלא אחד?

פתרון:

תובנת מפתח:

כדי למצוא כמה אותיות אפשר לכתוב, נחלק את הנפח הכולל בנפח הדרוש לאות אחת.

דרך א': פתרון אלגברי

שלב 1: הצבה בנוסחה

$\frac{x}{\frac{1}{x^2}}$

שלב 2: חילוק בשבר

כשמחלקים בשבר, הופכים את השבר ומכפילים:

$\frac{x}{\frac{1}{x^2}} = x \times x^2$

שלב 3: כפל חזקות

כשמכפילים חזקות עם אותו בסיס, מחברים את המעריכים:

$x^1 \times x^2 = x^{1+2} = x^3$

דרך ב': הצבת מספר

נציב $x = 2$:

נפח הדיו בעט: 2 סמ"ק
נפח לאות אחת: $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$ סמ"ק

מספר אותיות: $\frac{2}{\frac{1}{4}} = 2 \times 4 = 8$

נבדוק את התשובות עבור $x = 2$:

(1) $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ ✗
(2) $x = 2$ ✗
(3) $x^3 = 8$ ✓
(4) $\frac{1}{x^3} = \frac{1}{8}$ ✗

התשובה: (3)

שאלה 4 - אלגברה - הסתברות

השאלה:

דן ומשה משחקים משחק: תחילה מוטל מטבע שצדו האחד שחור וצדו השני לבן, ולאחר מכן מוטלת קובייה.

אם המטבע נופל על צדו השחור ובהטלת הקובייה מתקבל 1 או 2 - דן מנצח.

אם המטבע נופל על צדו הלבן ובהטלת הקובייה מתקבל 5 או 6 - משה מנצח.

בכל מקרה אחר המשחק מסתיים ללא מנצח.

מה ההסתברות שהמשחק יסתיים ללא מנצח?

פתרון:

כללי הסתברות חשובים:

כלל הכפל ("גם וגם"): ההסתברות שיקרו **גם** מאורע א' **וגם** מאורע ב' היא מכפלת ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות.

כלל החיבור ("או"): ההסתברות שיקרה מאורע א' **או** מאורע ב' (כשהם זרים) היא סכום ההסתברויות של כל אחד מהמאורעות.

נתונים:

ההסתברות שהמטבע ייפול על צד מסוים (שחור או לבן) היא $\frac{1}{2}$.

ההסתברות שהקובייה תראה מספר מסוים היא $\frac{1}{6}$.

נחשב את ההסתברות שיש מנצח, ואז נחסר מ-1 כדי לקבל את ההסתברות שאין מנצח.

שלב 1: הסתברות שדן מנצח

דן מנצח אם המטבע נופל על שחור **וגם** הקובייה מראה 1 או 2.

מכיוון שצריך **גם וגם**, נכפול את ההסתברויות:

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ההסתברות שדן מנצח: $\frac{1}{6}$

שלב 2: הסתברות שמשה מנצח

משה מנצח אם המטבע נופל על לבן **וגם** הקובייה מראה 5 או 6.

מכיוון שצריך **גם וגם**, נכפול את ההסתברויות:

$\frac{1}{2} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

ההסתברות שמשה מנצח: $\frac{1}{6}$

שלב 3: הסתברות שיש מנצח

יש מנצח אם דן מנצח **או** משה מנצח.

מכיוון שאלו מאורעות זרים (לא יכולים לקרות יחד), נחבר את ההסתברויות:

ההסתברות שיש מנצח: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

שלב 4: הסתברות שאין מנצח

ההסתברות שאין מנצח היא המשלים ל-1:

ההסתברות שאין מנצח: $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

התשובה: (4)

שאלה 5 - אלגברה - ממוצע

השאלה:

הממוצע של שבעה מספרים כלשהם הוא 30.
מיכל כתבה את שבעת המספרים בטור, מתחתם כתבה את המספר 110, ואז חישבה את הממוצע של כולם.
מהו ממוצע זה?

פתרון:

תובנת מפתח:

ממוצע שווה לסכום כל האיברים חלקי מספר האיברים. לכן אפשר למצוא את הסכום מתוך הממוצע.

שלב 1: מציאת סכום 7 המספרים המקוריים

אם הממוצע של 7 מספרים הוא 30, אז הסכום שלהם הוא:

$$7 \times 30 = 210$$

שלב 2: מציאת הסכום החדש

מיכל הוסיפה את המספר 110, אז הסכום החדש הוא:

$$210 + 110 = 320$$

שלב 3: חישוב הממוצע החדש

עכשיו יש 8 מספרים, אז הממוצע החדש הוא:

$$\frac{320}{8} = 40$$

התשובה: (4)

שאלה 6 - גיאומטריה - אי-שוויון המשולש

השאלה:

איזו משלשות המספרים הבאות **אינה** יכולה להיות אורכי הצלעות (בס"מ) של משולש?

פתרון:

אי-שוויון המשולש:

במשולש, סכום כל שתי צלעות חייב להיות **גדול** מהצלע השלישית.
מספיק לבדוק שסכום שתי הצלעות הקצרות גדול מהצלע הארוכה.

תשובה (1): 1, 5, 5.5

$$1 + 5 = 6 > 5.5$$

אפשרי ✓

תשובה (2): 3, 4, 6

$$3 + 4 = 7 > 6$$

אפשרי ✓

תשובה (3): 5, 6, 11.5

$$5 + 6 = 11 < 11.5$$

סכום שתי הצלעות הקצרות **קטן** מהצלע הארוכה - לא אפשרי! ✗

תשובה (4): 4, 12, 13

$$4 + 12 = 16 > 13$$

אפשרי ✓

התשובה: (3)

שאלה 7 - אלגברה - בעיית זמן

השאלה:

שעה לפני שעידן נכנס לכיתה, נעצר השעון שלו (לפני שנעצר הראה השעון את השעה האמיתית).
עשר דקות לפני שנכנס לכיתה חזר שעונו לפעול.
ברגע שנכנס לכיתה הורה שעונו על השעה (השגויה) 8:30.

מה הייתה השעה האמיתית ברגע שעידן נכנס לכיתה?

פתרון:

תובנת מפתח:

כאשר השעון עצור, הוא לא מתקדם בזמן שהזמן האמיתי ממשיך לעבור.
לכן השעון יפגר בדיוק בזמן שהיה עצור.

שלב 1: חישוב זמן העצירה

השעון נעצר שעה (60 דקות) לפני הכניסה לכיתה.
השעון חזר לפעול 10 דקות לפני הכניסה לכיתה.
לכן השעון היה עצור במשך: $60 - 10 = 50$

שלב 2: חישוב השעה האמיתית

השעון מפגר ב-50 דקות ביחס לשעה האמיתית.
אם השעון מראה 8:30, אז השעה האמיתית היא:
$8:30 + 50 = 9:20$

התשובה: (3)

שאלה 8 - אלגברה - שאריות

השאלה:

נתון: x ו-$\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$ הם שני מספרים שלמים וחיוביים.
מה השארית המתקבלת מחלוקת x ב-4?

פתרון:

דרך א': הצבת מספרים

ננסה להציב מספרים זוגיים (כדי ש-$\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$ יצא שלם):

$x=4: \frac{4}{4}+\frac{1}{2}=1.5$ - לא שלם ✗
$x=6: \frac{6}{4}+\frac{1}{2}=1.5+0.5=2$ ✓

מצאנו ש-$x=6$ מתאים. נבדוק את השארית בחלוקה ב-4:
6 מתחלק ב-4 פעם אחת (כי 4 קטן מ-6 אבל 8 כבר גדול מ-6), והשארית היא $6-4=2$.

דרך ב': פתרון אלגברי

אם $\left(\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\right)$ הוא מספר שלם, נסמן אותו n:

$$\frac{x}{4}+\frac{1}{2}=n$$
$$\frac{x}{4}=n-\frac{1}{2}$$
$$x=4n-2$$

כלומר x הוא 2 פחות מכפולה של 4, ולכן השארית בחלוקה ב-4 היא תמיד 2.

התשובה: (2)

הסקה מטבלה (שאלות 9-12)

שאלה 9 - בעיות מילוליות - קריאת תרשים

השאלה:

חוקרת עקבה אחרי צמח ממין B. לאחר שהצמח הפיץ זרעים, ספרה החוקרת את הזרעים ותיעדה את מרחקם מהצמח.
באיזה מטווחי המרחקים הבאים מצאה החוקרת את מספר הזרעים **הקטן** ביותר?

פתרון:

קריאת המקרא:

התרשים מראה את שיעור הזרעים שנוחתים בכל מרחק:

- אזור לבן: עד 5%
- אזור נקודות: 5%-15%
- אזור קווים אלכסוניים: 15%-25%
- אזור מפוספס: 25%-40%
- אזור אפור כהה: 40% ומעלה

ניתוח צמח B (פינה ימנית-תחתונה)

נבדוק את האזורים מהצמח והחוצה:

- 0-10 מטרים: אזור מפוספס (25%-40%)
- 10-20 מטרים: אזור מפוספס (25%-40%)
- 20-30 מטרים: אזור קווים אלכסוניים (15%-25%)
- 30-40 מטרים: אזור קווים אלכסוניים (15%-25%)
- 40-50 מטרים: אזור לבן (עד 5%) - **הכי מעט זרעים**

התשובה: (3)

שאלה 10 - בעיות מילוליות - קריאת תרשים

השאלה:

איזה מהתרשימים הבאים עשוי לתאר את מספר הזרעים של צמח כלשהו ממין C שנחתו בכל אחד מ-5 טווחי המרחקים המתוארים בתרשים?

פתרון:

ניתוח צמח C (בתחתית התרשים הראשי)

נבדוק את האזורים מהצמח והחוצה:

- 0-10 מטרים: אזור לבן (עד 5%) - מעט זרעים
- 10-20 מטרים: אזור מפוספס (25%-40%) - הרבה
- 20-30 מטרים: אזור אפור כהה (40% ומעלה) - **הכי הרבה זרעים**
- 30-40 מטרים: אזור מפוספס (25%-40%) - הרבה
- 40-50 מטרים: אזור מנוקד (5%-15%) - מעט

אנחנו מחפשים תרשים שמתחיל **נמוך**, **עולה** עד לשיא באמצע, ואז **יורד**.

בדיקת התרשימים

- תרשים (1): מתחיל גבוה ויורד בהדרגה. אנחנו מחפשים התחלה נמוכה, לכן לא מתאים.
- תרשים (2): מתחיל נמוך, עולה לשיא באמצע, ואז יורד. זה בדיוק מה שאנחנו מחפשים - **מתאים!**

- תרשים (3): מתחיל גבוה, יורד ואז עולה. זה ההפך ממה שאנחנו מחפשים, לכן לא מתאים.
- תרשים (4): רק עולה לאורך כל הדרך. אנחנו צריכים גם ירידה בסוף, לכן לא מתאים.

התשובה: (2)

שאלה 11 - בעיות מילוליות - קריאת תרשים

השאלה:

מה השיעור **הגדול ביותר האפשרי** של זרעי צמח ממין A שנחתו במרחק הגדול מ-40 מטרים מהצמח?

פתרון:

תובנת מפתח:

כדי למצוא את הכמות **הגדולה ביותר** של זרעים שיכולה ליפול מעבר ל-40 מטרים, נניח שבכל האזורים האחרים נפלו **כמה שפחות** זרעים. כך יישארו כמה שיותר זרעים לאזור שמעבר ל-40 מטרים.

שלב 1: ההערכה הנמוכה ביותר לכל אזור מ-0 עד 40 מטרים

נבדוק את צמח A ונמצא כמה זרעים **לפחות** נפלו בכל אזור:

- 0-10 מטרים: אזור לבן (עד 5%) - יכול להיות שלא נפלו שם זרעים בכלל (0%)
- 10-20 מטרים: אזור מנוקד (5%-15%) - נפלו שם **לפחות** 5% מהזרעים
- 20-30 מטרים: אזור קווים אלכסוניים (15%-25%) - נפלו שם **לפחות** 15% מהזרעים
- 30-40 מטרים: אזור מפוספס (25%-40%) - נפלו שם **לפחות** 25% מהזרעים

שלב 2: סכום הזרעים שנפלו לפחות מ-0 עד 40 מטרים

$$0\% + 5\% + 15\% + 25\% = 45\%$$

שלב 3: הכמות המקסימלית מעבר ל-40 מטרים

אם לפחות 45% מהזרעים נפלו עד 40 מטרים, אז מעבר ל-40 מטרים יכלו ליפול **לכל היותר**:

$$100\% - 45\% = 55\%$$

התשובה: (3)

שאלה 12 - בעיות מילוליות - קריאת תרשים

השאלה:

נתון: במין אחר של צמחים, מין T, כל צמח מפיץ מספר **שווה** של זרעים בכל אחד מטווחי המרחקים המתוארים בתרשים (ואינו מפיץ זרעים במרחקים גדולים יותר).

איזה מהתרשימים הבאים מתאר את מין T?

פתרון:

תובנת מפתח:

אם מספר הזרעים **שווה** בכל 5 טווחי המרחקים, אז בכל טווח נוחתים בדיוק 20% מהזרעים (כי $100\% \div 5 = 20\%$).

לכן צריך למצוא תרשים שבו כל הטבעות מסומנות באזור שמכיל 20%.

בדיקת התרשימים

- תרשים (1): כל הטבעות מנוקדות (5%-15%). הטווח הזה **לא מכיל** 20%, לכן לא מתאים.
- תרשים (2): כל הטבעות בקווים אלכסוניים (15%-25%). הטווח הזה **מכיל** 20% - **מתאים!**

- תרשים (3): כל הטבעות מפוספסות (25%-40%). הטווח הזה **לא מכיל** 20%, לכן לא מתאים.
- תרשים (4): טוען שכל אחד מהתרשימים עשוי להתאים - לא נכון, כי רק תרשים (2) מכיל את 20%.

התשובה: (2)

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - אלגברה - פישוט ביטויים

השאלה:

$(L \cdot T - M) - (M \cdot T - L) = ?$

פתרון:

שלב 1: פתיחת סוגריים

נפתח את הסוגריים (שימו לב: המינוס לפני הסוגריים השניים הופך את הסימנים):

$L \cdot T - M - M \cdot T + L$

שלב 2: קיבוץ איברים

נסתכל על התשובות האפשריות - כולן מכילות את הגורם (L - M) או (M - L).

לכן נקבץ את האיברים כך שנוכל להוציא את הגורם הזה:

$(L \cdot T - M \cdot T) + (L - M)$

שלב 3: הוצאת גורם משותף T

נוציא T מהזוג הראשון, ונשים לב שהזוג השני הוא בדיוק (L - M):

$T(L - M) + (L - M)$

שלב 4: הוצאת גורם משותף (L - M)

עכשיו יש גורם משותף (L - M) בשני האיברים, נוציא אותו:

$(L - M)(T + 1)$

התשובה: (1)

שאלה 14 - אלגברה - ספרת יחידות

השאלה:

מהי ספרת היחידות של 8^6?

פתרון:

דרך א': חישוב ישיר שלב אחר שלב

תובנת מפתח:

כשמכפילים שני מספרים, ספרת היחידות של התוצאה תלויה **רק** בספרות היחידות של שני המספרים.
לכן נעקוב אחרי ספרת היחידות בלבד בכל שלב.

חישוב $8^6 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8$

נחשב בזוגות, ונעקוב אחרי ספרת היחידות:

שלב 1: $8 \times 8 = 64$ → ספרת יחידות: 4

שלב 2: 64×64 → מכפילים רק ספרות יחידות: $4 \times 4 = 16$ → ספרת יחידות: 6

שלב 3: (תוצאה קודמת) $\times 64$ → מכפילים רק ספרות יחידות: $6 \times 4 = 24$ → ספרת יחידות: 4

דרך ב': מציאת מחזוריות בחזקות של 2

שלב 1: פישוט לחזקות של 2

נפשט את 8 לחזקה של 2 לפי חוקי חזקות:

$8^6 = (2^3)^6 = 2^{18}$

שלב 2: מציאת המחזוריות של חזקות 2

נחשב את ספרת היחידות של החזקות הראשונות של 2:

$2^1 = 2$ → ספרת יחידות: 2

$2^2 = 4$ → ספרת יחידות: 4

$2^3 = 8$ → ספרת יחידות: 8

$2^4 = 16$ → ספרת יחידות: 6

$2^5 = 32$ → ספרת יחידות: 2 (חוזר!)

$2^6 = 64$ → ספרת יחידות: 4 (חוזר!)

$2^7 = 128$ → ספרת יחידות: 8 (חוזר!)

המחזור הוא: $2, 4, 8, 6$ (אורך המחזור: 4)

שלב 3: מציאת המיקום במחזור

2^{18} נמצא במיקום 18.

נחלק 18 ב-4 (אורך המחזור): השארית היא 2.

לכן 2^{18} נמצא במיקום השני במחזור.

המיקום השני במחזור $(2, 4, 8, 6)$ הוא 4.

מאחר שהוא במקום השני, ספרת היחידות היא 4.

התשובה: (4)

שאלה 15 - גיאומטריה - ריבוע ומעגל

נתונים:

- ABCD ריבוע, O מרכז המעגל
- המעגל משיק לצלע DC ולהמשך הצלע BC
- קוטר המעגל = אורך צלע הריבוע = 2 ס"מ

מה המרחק בין הקודקוד A לנקודה O?

פתרון:

משפט:

במעגל, רדיוס למשיק מאונך למשיק (יוצרים זווית ישרה).

שלב 1: מציאת הרדיוס

קוטר המעגל = 2 ס"מ, לכן הרדיוס = 1 ס"מ.

שלב 2: בניית משולש עזר

נגדיר את הנקודה E כנקודה על היקף המעגל שנמצאת על ההמשך של הצלע AD לימין.

נבנה את משולש העזר AOE. זהו משולש ישר-זווית (לפי המשפט, הזווית ב-E היא 90° מכיוון ש-OE הוא רדיוס המאונך ל-AE, שהוא המשך של צלע AD עד נקודת ההשקה).

שלב 3: מציאת אורכי הצלעות

הצלע OE: זהו רדיוס המעגל, לכן $OE = 1$.

הצלע AE:

הצלע AD = 2 ס"מ (צלע הריבוע).

נקודה E נמצאת ישירות מעל מרכז המעגל. מאחר שאנחנו יודעים שנקודה O נמצאת במרחק רדיוס (1 ס"מ) מצלע DC, ו-OE מקביל ל-DC, ניתן לקבוע ש-$DE = 1$.

לכן $AE = AD + DE = 2 + 1 = 3$.

שלב 4: חישוב AO לפי משפט פיתגורס

במשולש ישר-זווית AOE, הצלע AO היא היתר. לפי משפט פיתגורס:

$$AO = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

טיפ כללי:

כאשר מבקשים מאיתנו למצוא אורך של קטע שלא מופיע בשרטוט, כדאי לשרטט אותו ולחפש משולש שהקטע הזה הוא אחת מצלעותיו. עבודה עם משולשים היא לעתים קרובות הדרך הקלה ביותר לפתור בעיות גיאומטריות.

התשובה: (2)

שאלה 16 - בעיות מילוליות - בעיות תנועה

נתונים:

- מהירות בשעה הראשונה: W קמ"ש
- מהירות בשעה השנייה: $(W-2)$ קמ"ש
- $W=10+x$, כאשר x הוא מספר חודשי האימון השלמים שעברו

לאחר כמה חודשי אימון שלמים תצליח שגית לרוץ 30 ק"מ בשעתיים?

פתרון:

תובנת מפתח:

מרחק = מהירות × זמן. מכיוון שהיא רצה שעה אחת בכל מהירות, המרחק בכל שעה שווה למהירות באותה שעה.
לכן, המרחק הכולל בשעתיים = מהירות בשעה ראשונה + מהירות בשעה שנייה = $W+(W-2)$.

דרך א': הצבת תשובות

נבדוק כל תשובה ונראה איזו נותנת מרחק של 30 ק"מ בשעתיים.

תשובה (1): $x=5$ חודשים
מהירות בשעה ראשונה: $W=10+5=15$ קמ"ש
מהירות בשעה שנייה: $W-2=15-2=13$ קמ"ש
מרחק כולל: $15+13=28$ ק"מ
זה לא 30 ק"מ, לכן תשובה (1) **נפסלת**.

תשובה (2): $x=6$ חודשים
מהירות בשעה ראשונה: $W=10+6=16$ קמ"ש
מהירות בשעה שנייה: $W-2=16-2=14$ קמ"ש
מרחק כולל: $16+14=30$ ק"מ
זה בדיוק 30 ק"מ - **מתאים!**

דרך ב': פתרון אלגברי

שלב 1: בניית משוואה למרחק הכולל

כדי לרוץ 30 ק"מ בשעתיים:
מרחק בשעה ראשונה + מרחק בשעה שנייה = 30
$W+(W-2)=30$

שלב 2: פתרון המשוואה

$2W-2=30$
$2W=32$
$W=16$

כלומר, כדי לרוץ 30 ק"מ בשעתיים, היא צריכה שמהירות הבסיס תהיה 16 קמ"ש, ואז המהירות בשעה השנייה תהיה 14 קמ"ש (סה"כ $16+14=30$).

שלב 3: מציאת מספר חודשי האימון

נציב בנוסחה $W=10+x$:
$10+x=16$
$x=6$

כלומר, לאחר 6 חודשי אימון מהירות הבסיס שלה תהיה 16 קמ"ש, והיא תוכל לרוץ 30 ק"מ בשעתיים.

התשובה: (2)

שאלה 17 - גיאומטריה - מלבן ומשולש

נתונים:

- ABCD מלבן עם היקף 20 ס"מ
- זווית DBC = 60°

מה אורך הצלע CD?

פתרון:

זיהוי משולש זהב:

במלבן, כל הזוויות הן 90°. לכן המשולש BCD הוא משולש ישר-זווית עם זוויות 30°, 60° ו-90°. זהו **משולש זהב**, שבו יחסי הצלעות קבועים: $1 : \sqrt{3} : 2$.

טיפ חשוב:

כל פעם שאנחנו רואים משולש ישר-זווית עם זווית של 30° או 60°, מדובר במשולש זהב. במקרה כזה, נשתמש ביחסי הצלעות הקבועים כדי לפתור במהירות.

שלב 1: סימון הצלעות

נסמן $CD = x$.

לפי יחסי הצלעות הקבועים במשולש זהב, הצלע שמול הזווית של 60° גדולה פי $\sqrt{3}$ מהצלע שמול הזווית של 30°.
הצלע CD היא מול הזווית של 30° (בקודקוד B), והצלע BC היא מול הזווית של 60° (בקודקוד D).
לכן: $BC = x \cdot \sqrt{3}$.

שלב 2: שימוש בהיקף המלבן

היקף המלבן הוא 20 ס"מ, ובמלבן יש שתי צלעות באורך CD ושתי צלעות באורך BC:

$$2 \cdot CD + 2 \cdot BC = 20$$
$$CD + BC = 10$$

נציב $BC = x\sqrt{3}$:

$$x + x\sqrt{3} = 10$$
$$x(1 + \sqrt{3}) = 10$$

שלב 3: פתרון

$$CD = x = \frac{10}{1+\sqrt{3}}$$

התשובה: (1)

שאלה 18 - בעיות מילוליות - מיחזור

נתונים:

- נר שעווה מאיר במשך שעה אחת, ואז נמס
- משני נרות שנמסו אפשר למחזר וליצור נר אחד חדש
- אי אפשר למחזר כמות קטנה יותר של שעווה
- מתחילים עם 16 נרות

כמה שעות אור, לכל היותר, אפשר להפיק מ-16 נרות?

פתרון:

תובנת מפתח:

נעקוב אחרי התהליך שלב אחרי שלב: כל נר נותן שעה אחת של אור, ואז אפשר למחזר כל זוג נרות משומשים לנר חדש.

מעקב אחרי התהליך:

סבב 1: מדליקים 16 נרות ← 16 שעות אור ← נשארים 16 נרות משומשים
סבב 1 הניב: 16 שעות אור

לוקחים את 16 הנרות המשומשים והופכים אותם לנרות חדשים: $16 \div 2 = 8$ נרות חדשים

סבב 2: מדליקים 8 נרות ← 8 שעות אור ← נשארים 8 נרות משומשים
סבב 2 הניב: 8 שעות אור

לוקחים את 8 הנרות המשומשים והופכים אותם לנרות חדשים: $8 \div 2 = 4$ נרות חדשים

סבב 3: מדליקים 4 נרות ← 4 שעות אור ← נשארים 4 נרות משומשים
סבב 3 הניב: 4 שעות אור

לוקחים את 4 הנרות המשומשים והופכים אותם לנרות חדשים: $4 \div 2 = 2$ נרות חדשים

סבב 4: מדליקים 2 נרות ← 2 שעות אור ← נשארים 2 נרות משומשים
סבב 4 הניב: 2 שעות אור

לוקחים את 2 הנרות המשומשים והופכים אותם לנר חדש: $2 \div 2 = 1$ נר חדש

סבב 5: מדליקים 1 נר ← 1 שעת אור ← נשאר 1 נר משומש
סבב 5 הניב: 1 שעת אור

אי אפשר למחזר נר אחד בלבד - התהליך נגמר.

סיכום:

מחברים את כל שעות האור מכל הסבבים:
$16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$

התשובה: (4)

שאלה 19 - גיאומטריה - מרובע ושטחי משולשים

נתונים:

- ABCD מרובע
- שטח המשולש ABC שווה לשטח המשולש DBC

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון:

תובנת מפתח:

לשני המשולשים ABC ו-DBC יש בסיס משותף - הצלע BC.

שלב 1: נוסחת שטח משולש

$S = \frac{1}{2} \times a \times h$ (כאשר a הוא הבסיס ו-h הוא הגובה)

מכיוון ששני המשולשים חולקים את אותו בסיס (BC), ושטחיהם שווים, הגבהים שלהם חייבים להיות שווים.

שלב 2: מהו הגובה של כל משולש?

הגובה של משולש ABC (ביחס לבסיס BC) הוא המרחק מנקודה A לצלע BC.
הגובה של משולש DBC (ביחס לבסיס BC) הוא המרחק מנקודה D לצלע BC.

מכיוון שהשטחים שווים והבסיס משותף, המסקנה היא:
המרחק מנקודה A לצלע BC שווה למרחק מנקודה D לצלע BC.

שלב 3: מה המשמעות?

נקודה A נמצאת במרחק מסוים מהצלע BC.
נקודה D נמצאת באותו מרחק בדיוק מהצלע BC.

הקו AD מחבר בין שתי הנקודות האלה. מאחר ששתי הנקודות נמצאות באותו מרחק מהצלע BC, המרחק מהצלע BC לא משתנה לאורך כל הקו AD.

כאשר קו שומר על מרחק קבוע מקו אחר - שני הקווים **מקבילים**.

לכן: $AD \parallel BC$

התשובה: (1)

שאלה 20 - אלגברה - טווחים

נתונים:

$\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}$

$2 < b < 3$

מה הטווח המדויק של הביטוי $\frac{a}{b}$?

פתרון:

תובנת מפתח:

כדי למצוא טווח של שבר, צריך לחשוב: מתי השבר הכי קטן ומתי הכי גדול?

שבר קטן = מונה קטן ומכנה גדול.

שבר גדול = מונה גדול ומכנה קטן.

שימו לב: הטווחים שנתנו לנו הם טווחים פתוחים (עם סימן < ולא ≤), כלומר a ו-b לא באמת מגיעים לערכי הקצה. לכן נשתמש בביטוי "מתקרב ל" ולא "שווה".

שלב 1: מציאת הערך המינימלי של $\frac{a}{b}$

כדי לקבל את השבר הקטן ביותר, נרצה מונה קטן ומכנה גדול.

לכן נחפש מתי a הכי קטן ו-b הכי גדול:

- a מינימלי ← מתקרב ל-$\frac{1}{5}$
- b מקסימלי ← מתקרב ל-3

לכן הערך המינימלי של $\frac{a}{b}$ מתקרב ל:

$\frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

שלב 2: מציאת הערך המקסימלי של $\frac{a}{b}$

כדי לקבל את השבר הגדול ביותר, נרצה מונה גדול ומכנה קטן.

לכן נחפש מתי a הכי גדול ו-b הכי קטן:

- a מקסימלי ← מתקרב ל-$\frac{1}{4}$
- b מינימלי ← מתקרב ל-2

לכן הערך המקסימלי של $\frac{a}{b}$ מתקרב ל:

$\frac{\frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

שלב 3: הטווח המדויק

$\frac{1}{15} < \frac{a}{b} < \frac{1}{8}$

התשובה: (1)