מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(2)	(3)	(4)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(2)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(4)	(1)	(2)	(2)	(3)	(2)	(1)	(4)	(3)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - גיאומטריה - אלכסון ריבוע, מרחק מרבי על היקף

השאלה: שחר ורוני עומדים על היקף של ריבוע שצלעו 5 מטרים. מה המרחק הגדול ביותר שיכול להיות ביניהם (בקו ישר)?

פיתרון:

שחר ורוני יכולים לעמוד בכל נקודה על היקף הריבוע. כדי שהמרחק ביניהם יהיה הגדול ביותר, עליהם לעמוד בשתי הנקודות הרחוקות ביותר זו מזו על ההיקף.

הערה חשובה: שתי הנקודות הרחוקות ביותר זו מזו על היקף ריבוע הן שני קודקודים נגדיים (באלכסון). המרחק ביניהם הוא אורך האלכסון של הריבוע.

מהו משפט פיתגורס?
במשולש ישר-זווית, סכום ריבועי שני הניצבים שווה לריבוע היתר. כלומר, אם שני הניצבים הם a ו-b, והיתר הוא c, אז:
$a^2 + b^2 = c^2$

כעת ניישם את המשפט. האלכסון מחלק את הריבוע לשני משולשים ישרי-זווית. בכל משולש כזה, שני הניצבים הם צלעות הריבוע (כל אחת באורך 5), והיתר הוא האלכסון d.

לפי משפט פיתגורס, ריבוע האלכסון שווה לסכום ריבועי שני הצלעות:
$d^2 = 5^2 + 5^2$

מכיוון ש-$5^2 = 25$, נקבל:
$d^2 = 25 + 25 = 50$

מצאנו כי ריבוע האלכסון שווה ל-50. כעת נוציא שורש לשני האגפים כדי למצוא את אורך האלכסון עצמו:
$d = \sqrt{50}$

כדי לפשט את השורש, נפרק את 50 למכפלה שבה אחד הגורמים הוא מספר שלם בריבוע:
$\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$

אורך האלכסון הוא $5\sqrt{2}$ מטרים, וזהו המרחק הגדול ביותר האפשרי בין שחר לרוני.

תשובה (2).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 2 - בעיה מילולית - קצב עבודה, יחס בין ימים

השאלה: אוהד ורננה הם פקחי חנייה. ביום ראשון בדק אוהד x מכוניות בשעה, ורננה בדקה y מכוניות בשעה. ביום שני הגדיל אוהד את קצב עבודתו פי 2 ורננה הגדילה את קצב עבודתה פי 3. מספר שעות העבודה היומי של אוהד קבוע ושווה למספר שעות העבודה היומי של רננה. פי כמה גדול מספר המכוניות הכולל שהם בדקו ביום שני ממספר המכוניות הכולל שהם בדקו ביום ראשון?

פיתרון:

הערה חשובה: נתון שמספר שעות העבודה היומי של אוהד ורננה קבוע וזהה. מכיוון שהשאלה שואלת על יחס (פי כמה), מספר השעות הקונקרטי לא משנה — הוא יצטמצם בחלוקה. לכן נניח לנוחות ששניהם עובדים שעה אחת ביום. כך, מספר המכוניות שכל אחד בדק ביום שווה בדיוק לקצב העבודה שלו.

יום ראשון:
אוהד בדק x מכוניות, רננה בדקה y מכוניות.
סך הכול ביום ראשון: $x + y$ מכוניות.

יום שני:
אוהד הגדיל את קצבו פי 2, ולכן בדק $2x$ מכוניות.
רננה הגדילה את קצבה פי 3, ולכן בדקה $3y$ מכוניות.
סך הכול ביום שני: $2x + 3y$ מכוניות.

כדי למצוא פי כמה גדול יום שני מיום ראשון, נחלק את סך המכוניות של יום שני בסך המכוניות של יום ראשון:
$\frac{2x+3y}{x+y}$

תשובה (3).

שאלה 3 - בעיה מילולית - הפרש, העברת סוכריות

השאלה: לאלי היו 4 סוכריות יותר מלשלומית. איזה מן המשפטים הבאים נכון בהכרח?

פיתרון:

נבחר דוגמה מספרית: נניח שלשלומית יש 2 סוכריות ולאלי יש 6 סוכריות (הפרש של 4). נבדוק כל תשובה.

<u>תשובה (1)</u>: אלי נתן לשלומית 4 סוכריות - מספרי הסוכריות שווים.
לאלי: $6 - 4 = 2$. לשלומית: $2 + 4 = 6$.
ההפרש: $6 - 2 = 4$. ההפרש נשאר 4, אבל כעת לשלומית יש יותר מאלי - המספרים אינם שווים. המשפט לא נכון.

<u>תשובה (2)</u>: אלי נתן לשלומית 3 סוכריות - ההפרש גדל.
לאלי: $6 - 3 = 3$. לשלומית: $2 + 3 = 5$.
ההפרש: $5 - 3 = 2$. ההפרש קטן מ-4 ל-2 ולא גדל - המשפט לא נכון.

<u>תשובה (3)</u>: שלומית נתנה לאלי 2 סוכריות - ההפרש קטן.
לאלי: $6 + 2 = 8$. לשלומית: $2 - 2 = 0$.
ההפרש: $8 - 0 = 8$. ההפרש גדל מ-4 ל-8 ולא קטן - המשפט לא נכון.

<u>תשובה (4)</u>: אלי נתן לשלומית סוכרייה אחת - ההפרש קטן.
לאלי: $6 - 1 = 5$. לשלומית: $2 + 1 = 3$.
ההפרש: $5 - 3 = 2$. ההפרש אכן קטן מ-4 ל-2.
המשפט נכון.

תשובה (4).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 4 - אלגברה - חזקות, ממוצע

השאלה: נתון: $t^2 = w^2$, $t \neq w$. M הוא הממוצע של t ו-w. איזו מהטענות נכונה בהכרח בנוגע ל-M?

פיתרון:

מתי שני מספרים מקיימים $t^2 = w^2$? יש שתי אפשרויות: או ש-$t = w$, או ש-$t = -w$.
מכיון שנתון ש-$t \neq w$, נשארת רק האפשרות ש-$t = -w$. כלומר, שני המספרים שווים בערכם המוחלט אבל הפוכים בסימנם.

נבחר דוגמה מספרית: $t = 3$ ו-$w = -3$.
נוודא שהנתונים מתקיימים: $3^2 = 9$ וגם $(-3)^2 = 9$, ואכן $t \neq w$.

נחשב את הממוצע:
$M = \frac{3+(-3)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

באופן כללי, מכיון ש-$t = -w$, הממוצע יהיה תמיד:
$M = \frac{t+(-t)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

ולכן M שווה ל-0.

תשובה (2).

שאלה 5 - אלגברה - שארית חלוקה, פעולה מוגדרת

השאלה: לכל מספר שלם וחיובי, הפעולה מוגדרת כשארית החלוקה של המספר ב-50. מה ערך הביטוי הבא?
$\$(5{,}000) \cdot \$(4{,}999) + \$(5{,}001)$

פיתרון:

מהי שארית חלוקה? כשמחלקים מספר במספר אחר ולא יוצא מספר שלם, נשאר "שארית". למשל, כשמחלקים 13 ב-5, המספר הכי קרוב מלמטה שמתחלק ב-5 הוא 10 (כי $5 \times 2 = 10$). השארית היא ההפרש:
$13 - 10 = 3$
כלומר, השארית של חלוקת 13 ב-5 היא 3. אם החלוקה יוצאת בדיוק (ללא שארית), השארית היא 0.

נתחיל בחישוב שארית החלוקה של $\$(5{,}000)$. נחלק:
$5{,}000 \div 50 = 100$
החלוקה יצאה בדיוק, ללא שארית. לכן:
$\$(5{,}000) = 0$

מכיון שהתוצאה היא 0, כל המכפלה מתאפסת, ואין צורך לחשב את שארית החלוקה של $\$(4{,}999)$ כלל. נשאר לחשב רק את שארית החלוקה של $\$(5{,}001)$.

נחשב את שארית החלוקה של $\$(5{,}001)$. המספר השלם הקרוב מלמטה שמתחלק ב-50 הוא:
$100 \cdot 50 = 5{,}000$
השארית היא ההפרש:
$5{,}001 - 5{,}000 = 1$
לכן:
$\$(5{,}001) = 1$

נציב בביטוי:
$0 \cdot \$(4{,}999) + 1 = 0 + 1 = 1$

תשובה (1).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 6 - גיאומטריה - גזרת מעגל

השאלה: A היא נקודה על היקף מעגל שמרכזו O. משולש OAB הוא משולש ישר-זווית, ושטחו $\frac{\sqrt{3}}{2}$ סמ"ר. אורך הצלע AB הוא $\sqrt{3}$ ס"מ. מה שטח הגזרה הכהה (בסמ"ר)?

פיתרון:

מציאת הרדיוס: נתון כי הזווית הישרה נמצאת בנקודה A, כלומר הזווית בין הצלע OA לצלע AB שווה ל-$90°$. במשולש ישר-זווית, שטח המשולש שווה למחצית מכפלת שני הניצבים. הניצבים הם OA ו-AB, ולכן:

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

נתון כי AB שווה ל-$\sqrt{3}$, ולכן נציב:

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

נפשט: נכפול את שני האגפים ב-2, ונחלק ב-$\sqrt{3}$, ונקבל:

$$OA = 1$$

מכיוון ש-OA הוא רדיוס המעגל (קטע מהמרכז O לנקודה A שעל ההיקף), מצאנו כי:

$$r = 1$$

זיהוי משולש זהב: מצאנו שני ניצבים במשולש ישר-הזווית: OA שווה ל-1 ו-AB שווה ל-$\sqrt{3}$. יחס הניצבים הוא:

$$1 : \sqrt{3}$$

וזהו יחס הניצבים של **משולש זהב** (משולש ישר-זווית עם זוויות $90°$-$60°$-$30°$). במשולש זהב, הזווית שמול הניצב הקצר (OA שאורכו 1) היא $30°$, והזווית שמול הניצב הארוך (AB שאורכו $\sqrt{3}$) היא $60°$. מכיוון שהזווית שמול AB היא הזווית בנקודה O, מצאנו כי:

$$\angle AOB = 60°$$

חישוב שטח הגזרה: שטח המעגל כולו הוא:

$$\pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

הזווית המרכזית של הגזרה היא $60°$ מתוך $360°$ של המעגל השלם, כלומר הגזרה היא:

$$\frac{60}{360} = \frac{1}{6}$$

הגזרה מהווה שישית מהמעגל. לכן שטח הגזרה הוא:

$$\frac{1}{6} \cdot \pi = \frac{\pi}{6}$$

תשובה (2).

שאלה 7 - אלגברה - ריבועים שלמים

השאלה: x הוא מספר שלם המתחלק ב-3. אם ידוע ש-$\sqrt{x}$ הוא מספר שלם, כמה ערכים אפשריים יש ל-x בין 1 ל-100?

פיתרון:

הבנת התנאים: אם $\sqrt{x}$ הוא מספר שלם, אז x הוא **ריבוע שלם** - מספר שהוא ריבוע של מספר שלם. לדוגמה: $4, 9, 16, 25, 36$ וכו'.

מציאת הגבול העליון: אנחנו מחפשים ריבועים שלמים עד 100. מכיוון ש-$100 = 10^2$, הרי שהריבוע השלם הגדול ביותר שלא חורג מ-100 הוא 100 עצמו. הריבוע הבא, $11^2 = 121$, כבר חורג מהטווח. לכן עלינו לבדוק רק את הריבועים של המספרים 1 עד 10.

מתי ריבוע שלם מתחלק ב-3? המספר 3 הוא מספר ראשוני. כדי שריבוע שלם יתחלק ב-3, הבסיס שלו חייב להתחלק ב-3.

מציאת הערכים האפשריים: מחפשים את כל המספרים מ-1 עד 10 שמתחלקים ב-3. מספרים אלה הם $3, 6, 9$, והריבועים שלהם:

- $3^2 = 9$
- $6^2 = 36$
- $9^2 = 81$

יש 3 ערכים אפשריים: $9, 36, 81$.

תשובה (3).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 8 - אלגברה - תכונות מספרים

השאלה: נתון: x ו-y הם מספרים שליליים שלמים. z הוא מספר זוגי. הביטוי $y \cdot x^2 \cdot z$ בהכרח -

פיתרון:

מה אנחנו יודעים?

- x שלילי ושלם
- y שלילי ושלם
- z זוגי - אבל לא נאמר אם הוא חיובי או שלילי!
- x^2 תמיד חיובי (ריבוע של כל מספר שונה מאפס הוא חיובי)

תשובה (1) - שלילי
הביטוי הוא מכפלה של y (שלילי), x^2 (חיובי), ו-z. מכיוון ש-z יכול להיות חיובי או שלילי, נבדוק: אם z שלילי, המכפלה היא שלילי × חיובי × שלילי = חיובי. לכן הביטוי **לא בהכרח שלילי**.

תשובה (2) - חיובי
שוב, מכיוון ש-z יכול להיות חיובי או שלילי: אם z חיובי, המכפלה היא שלילי × חיובי × חיובי = שלילי. לכן הביטוי **לא בהכרח חיובי**.

תשובה (3) - אי-זוגי
z הוא מספר זוגי. כאשר מכפלה כוללת גורם זוגי, התוצאה תמיד זוגית. לכן הביטוי **לא יכול להיות אי-זוגי**.

תשובה (4) - זוגי
מכיוון ש-z הוא מספר זוגי, וכל מכפלה שאחד הגורמים בה הוא זוגי נותנת תוצאה זוגית, הביטוי $y \cdot x^2 \cdot z$ הוא **בהכרח זוגי**.

תשובה (4).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

שאלה 9 - תרשים טיסות - זוגות מקושרים הדדית

השאלה: שתי מדינות הן "זוג מקושר הדדית" אם אפשר להגיע מכל אחת מהן לאחרת בטיסה ישירה אחת. כמה זוגות מקושרים הדדית יש בתרשים?

פיתרון:

השיטה הכי טובה היא ספירה ידנית של כל הזוגות. ניתן לשים לב בקלות שמגרמניה יוצאות טיסות רק לדנמרק, ולכן את כל הזוגות שמערבים את גרמניה עם מדינה אחרת (מלבד דנמרק) אפשר לפסול מיד. כמו כן, אין טיסות להולנד כלל, ולכן היא לא יכולה להיות חלק מזוג מקושר הדדית.

בדיקת הזוגות:

- **אנגליה ודנמרק:** יש טיסה מאנגליה לדנמרק, ויש טיסה מדנמרק לאנגליה. **זוג מקושר הדדית!**
- **אנגליה ובלגיה:** יש טיסה מבלגיה לאנגליה, אבל אין טיסה מאנגליה לבלגיה. **לא מקושר הדדית.**
- **דנמרק וגרמניה:** יש טיסה מדנמרק לגרמניה, ויש טיסה מגרמניה לדנמרק. **זוג מקושר הדדית!**
- **דנמרק ובלגיה:** אין טיסה ישירה בין שתי המדינות. **לא מקושר הדדית.**
- **הולנד וכל מדינה:** אין טיסות להולנד. **לא יכולה להיות חלק מזוג מקושר הדדית.**

סך הכול 2 זוגות מקושרים הדדית: **אנגליה ודנמרק** ו-**דנמרק וגרמניה**.

תשובה (2).

---

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 10 - תרשים טיסות - מדינות מרכזיות

השאלה: מדינה נקראת "מרכזית" אם אפשר להגיע ממנה (לאו דווקא בטיסה ישירה) לכל מדינה אחרת. כמה מדינות מרכזיות יש?

פיתרון:

איך ניגשים לשאלה כזו? אפשר לבדוק כל מדינה ולראות אם אפשר להגיע ממנה לכל האחרות, אבל זה עלול לקחת זמן. דרך מהירה יותר היא לחפש "צוואר בקבוק" - מדינה שקשה להגיע אליה. אם נמצא מדינה כזו, נוכל לפסול הרבה אפשרויות בבת אחת: כל מדינה שאי אפשר להגיע ממנה למדינה הבעייתית - היא בוודאות לא מרכזית.

הולנד היא צוואר הבקבוק: אין טיסות להולנד כלל! לכן אף מדינה אחרת לא יכולה להיות מרכזית, כי אי אפשר להגיע ממנה להולנד.

נשאר לבדוק רק את הולנד עצמה:

- **מהולנד לדנמרק:** טיסה ישירה.
- **מהולנד לאנגליה:** טיסה ישירה.
- **מהולנד לבלגיה:** טיסה ישירה.
- **מהולנד לגרמניה:** דרך דנמרק (הולנד, דנמרק, גרמניה) או דרך בלגיה (הולנד, בלגיה, גרמניה).

מהולנד אפשר להגיע לכל מדינה, לכן **הולנד היא מדינה מרכזית.**

יש מדינה מרכזית אחת בלבד: **הולנד.**

תשובה (1).

שאלה 11 - תרשים טיסות - מסלול ארוך ביותר

השאלה: מה מספר הטיסות הישירות הגדול ביותר שאפשר לטוס בזו אחר זו בלי לעבור פעמיים באותה מדינה?

פיתרון:

איך ניגשים לשאלה כזו? יש 5 מדינות בתרשים. המסלול הארוך ביותר האפשרי יכלול לכל היותר 4 טיסות (כי עוברים ב-5 מדינות שונות, וכל טיסה מעבירה ממדינה למדינה). נבדוק אם אפשר להגיע ל-4 טיסות.

הולנד היא המפתח: אין טיסות להולנד, לכן אם רוצים לכלול אותה במסלול - חייבים להתחיל ממנה. אם לא נתחיל מהולנד, יש לנו רק 4 מדינות ולכן לכל היותר 3 טיסות.

גם בלגיה מגבילה את המסלול: לבלגיה מגיעים רק מהולנד, לכן אם רוצים לכלול גם אותה במסלול - הטיסה השנייה חייבת להיות לבלגיה. המסלול חייב להתחיל: הולנד, בלגיה, ...

המשך המסלול: מבלגיה יש טיסות לאנגליה ולגרמניה. לא משנה לאיזו מדינה נטוס - בכל מקרה נוכל להשלים מסלול של 4 טיסות. מספיק למצוא מסלול אחד כזה:

הולנד, בלגיה, אנגליה, דנמרק, גרמניה.

או:

הולנד, בלגיה, גרמניה, דנמרק, אנגליה.

4 טיסות ישירות, 5 מדינות שונות.

תשובה (4).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 12 - תרשים טיסות - תיקון טעות

השאלה: עדנה ביקרה בהולנד ותכננה לטוס בטיסה ישירה למדינה אחרת אך עלתה בטעות על הטיסה הלא נכונה. כדי לתקן את טעותה ולהגיע למדינה שאליה תכננה לטוס, נזקקה עדנה לשתי טיסות נוספות. לאיזו מדינה תכננה עדנה לטוס?

פיתרון:

מהולנד יש טיסות ישירות ל: דנמרק, אנגליה, בלגיה. נבדוק כל תשובה - לאיזו מדינה היא תכננה לטוס, ואם טעתה וטסה למדינה אחרת, האם היא תצטרך בדיוק 2 טיסות?

תשובה (1) - אנגליה
אם תכננה לטוס לאנגליה, היא יכלה לטעות ולטוס לדנמרק או לבלגיה.
טעתה וטסה לדנמרק: מדנמרק לאנגליה יש טיסה ישירה (טיסה אחת בלבד).
טעתה וטסה לבלגיה: מבלגיה לאנגליה יש טיסה ישירה (טיסה אחת בלבד).
לא מתאים.

תשובה (2) - בלגיה
אם תכננה לטוס לבלגיה, היא יכלה לטעות ולטוס לדנמרק או לאנגליה.
טעתה וטסה לדנמרק: מדנמרק אין דרך להגיע לבלגיה בכלל (מדנמרק אפשר רק להגיע לאנגליה או לגרמניה, ומשם אי אפשר להמשיך לבלגיה).
טעתה וטסה לאנגליה: מאנגליה אין דרך להגיע לבלגיה בכלל (מאנגליה אפשר רק להגיע לדנמרק או לגרמניה, ומשם אי אפשר להמשיך לבלגיה).
לא מתאים.

תשובה (3) - גרמניה
מהולנד אין טיסה ישירה לגרמניה, אז היא לא יכלה לתכנן לטוס לשם. לא מתאים.

תשובה (4) - דנמרק
אם תכננה לטוס לדנמרק, היא יכלה לטעות ולטוס לאנגליה או לבלגיה.
טעתה וטסה לאנגליה: מאנגליה לדנמרק יש טיסה ישירה (טיסה אחת בלבד).
טעתה וטסה לבלגיה: מבלגיה לדנמרק צריך 2 טיסות (בלגיה, גרמניה, דנמרק או בלגיה, אנגליה, דנמרק). מתאים!

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - בעיה מילולית - יחסים בתזמורת

השאלה: בתזמורת כלשהי מספר נגני הכינור הוא שליש ממספר נגני כלי המיתר וחמישית ממספר נגני התזמורת כולה. לפיכך, מספר נגני כלי המיתר הוא ____ ממספר נגני התזמורת כולה.

פיתרון:

בחירת המשתנה: נסמן את מספר נגני הכינור ב-x. למה דווקא נגני הכינור? כי הם מופיעים בשני הנתונים, ולכן נוח לבטא באמצעותם את שאר הכמויות.

ביטוי הכמויות באמצעות x:
מספר נגני הכינור הוא $\frac{1}{3}$ ממספר נגני כלי המיתר, ולכן מספר נגני כלי המיתר הוא $3x$.
מספר נגני הכינור הוא $\frac{1}{5}$ ממספר נגני התזמורת כולה, ולכן מספר נגני התזמורת כולה הוא $5x$.

החישוב:
מספר נגני כלי המיתר מתוך התזמורת כולה הוא:
$$\frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

המרה לאחוזים:
כדי להמיר שבר לאחוזים בקלות, נרחיב אותו למכנה 10 (כי אז המונה מייצג עשיריות, וכפול 10 נותן אחוזים):
$$\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 60\%$$

תשובה (1).

אביב 2024 - הסברים לפרק השני בחשיבה כמותית

שאלה 14 - גיאומטריה - זוויות חיצוניות

השאלה: בסרטוט שלפניכם משולש ABC. E היא נקודה כלשהי על AC השונה מ-A ומ-D .C היא נקודה כלשהי על BE השונה מ-B ומ-E. לפי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט, איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פיתרון:

איך ניגשים לשאלה כזו? עלינו למצוא קשר בין הזווית α ו-β. הזווית β נמצאת במשולש ABE, והזווית α נמצאת במשולש BCD. נחפש צורה שמחברת בין שני המשולשים. משולש CDE סמוך לשני המשולשים האלה, ולכן נתמקד בו.

קשר ל-β: נתבונן בזווית $\angle DEC$ במשולש CDE. זווית זו היא זווית חיצונית למשולש ABE, ולכן היא שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה: הזווית β ועוד זווית ABE. מכאן ש-$\angle DEC$ בהכרח גדולה מ-β.

קשר ל-α: הזווית α היא זווית חיצונית למשולש CDE, ולכן היא שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה: הזווית $\angle DEC$ ועוד זווית DCE.
מכאן ש-α בהכרח גדולה מ-$\angle DEC$.

המסקנה: מצאנו שרשרת של אי-שוויונות:

$$\beta < \angle DEC < \alpha$$

ולכן בהכרח $\alpha > \beta$.

תשובה (2).

שאלה 15 - גיאומטריה - שטח מנוקד

השאלה: ABCD הוא מלבן. נתון ש-AF = AC ונתון ש-AE שווה ל-$\frac{3}{2}$ ס"מ. מה גודל השטח המנוקד (בסמ"ר)?

פיתרון:

דרך הפיתרון: נחשב את שטח הצורה הכוללת (המלבן והמשולש שמשמאלו), נחסיר את שטח המשולש הלבן, ונקבל את השטח המנוקד.

שלב 1 - מציאת אורך הצלע BF:
נתון ש-AF = AC. המשולש AFC הוא משולש שווה שוקיים, והקטע AB הוא הגובה לבסיס FC.
במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס חוצה את הבסיס, ולכן BF = BC = 1 ס"מ.

שלב 2 - שטח הצורה הכוללת:
הצורה הכוללת מורכבת מהמלבן ABCD ומהמשולש ABF שמשמאלו.

שטח המלבן ABCD: אורכה של צלע AD הוא 2 ס"מ ואורכה של צלע AB הוא 1 ס"מ.

$$2 \times 1 = 2$$

שטח המלבן הוא 2 סמ"ר.

שטח המשולש ABF: אורכו של הבסיס BF הוא 1 ס"מ ואורכו של הגובה AB הוא 2 ס"מ.

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

שטח המשולש הוא 1 סמ"ר.

סך הכול שטח הצורה הכוללת הוא 3 סמ"ר.

שלב 3 - שטח המשולש הלבן:
אורכו של הבסיס AE הוא $\frac{3}{2}$ ס"מ ואורכו של הגובה הוא 1 ס"מ.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$$

שטח המשולש הלבן הוא $\frac{3}{4}$ סמ"ר.

שלב 4 - השטח המנוקד:
השטח המנוקד שווה לשטח הצורה הכוללת פחות שטח המשולש הלבן.

$$3 - \frac{3}{4} = 2\frac{1}{4}$$

השטח המנוקד הוא $2\frac{1}{4}$ סמ"ר.

תשובה (2).

שאלה 16 - אלגברה - פישוט ביטויים

השאלה: a ו-b מספרים חיוביים. מהו ערך הביטוי $\sqrt{\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\right)\cdot\frac{1}{ab}}$?

פיתרון:

שלב 1 - פישוט הביטוי שבסוגריים:

נתבונן בביטוי $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2$. נמצא מכנה משותף ab:

$$\frac{b^2}{ab}+\frac{a^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}$$

נשים לב שאפשר לכנס את המונה באמצעות נוסחת כפל מקוצר:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

לכן הביטוי שבסוגריים שווה ל-$\frac{(a+b)^2}{ab}$.

שלב 2 - כפל בשבר:

נכפיל את התוצאה ב-$\frac{1}{ab}$:

$$\frac{(a+b)^2}{ab}\cdot\frac{1}{ab}=\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}$$

שלב 3 - הוצאת שורש:

מכיוון ש-a ו-b חיוביים, כל הביטויים חיוביים ואפשר להוציא שורש:

$$\sqrt{\frac{(a+b)^2}{a^2b^2}}=\frac{a+b}{ab}$$

שלב 4 - פישוט התוצאה:

נפרק את השבר:

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{a}{ab}+\frac{b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

תשובה (3).

שאלה 17 - בעיה מילולית - צופים באולם

השאלה: במהלך הקרנת סרט עזבו את אולם הקולנוע יותר מ-$\frac{1}{5}$ מהצופים, ואף צופה לא נכנס. בתום הסרט היו באולם 22 צופים. בתחילת ההקרנה היה מספר הצופים באולם לכל הפחות -

פיתרון:

תובנה חשובה: כל התשובות הן בין 25 ל-30, ולכן חמישית מהן היא בין 5 ל-6. צופים הם בני אדם ומגיעים במספרים שלמים, לכן אם עזבו **יותר** מחמישית מהצופים, עזבו לפחות 6 צופים.

תשובה (1) - 26 צופים

אם היו 26 צופים בתחילה, כמה עזבו?

$$26-22=4$$

עזבו 4 צופים בלבד, וזה פחות מ-6. לא מתאים.

תשובה (2) - 28 צופים

אם היו 28 צופים בתחילה, כמה עזבו?

$$28-22=6$$

עזבו 6 צופים, וזה אכן יותר מחמישית מ-28. מתאים!

מכיוון שהשאלה מבקשת את המספר המינימלי ומצאנו שתשובה (2) מתאימה, אפשר לסמן אותה ואין צורך לבדוק את התשובות הבאות.

תשובה (2).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 18 - אלגברה - ערך מוחלט

השאלה: x ו-y הם מספרים שונים מ-0. נתון: $|x+y| = |x| - |y|$. איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון בהכרח?

פיתרון:

מתי המשוואה מתקיימת? לא ברור כיצד לפשט את המשוואה ולהיפטר מהערך המוחלט. לכן ננסה להבין באילו מקרים המשוואה מתקיימת על ידי בדיקת מקרים שונים.

מקרה 1 - שני המספרים חיוביים:

נציב $x = 1,\ y = 2$:

$|1+2| = |1| - |2|$

$3 = -1$

המשוואה לא מתקיימת. באופן כללי, כששני המספרים חיוביים, באגף שמאל נחבר שני חיוביים ונקבל ערך גדול, ובאגף ימין נחסר חיובי מחיובי ונקבל ערך קטן יותר. לכן המשוואה לא יכולה להתקיים כששניהם חיוביים.

מקרה 2 - שני המספרים שליליים:

נציב $x = -1,\ y = -2$:

$|(-1) + (-2)| = |-1| - |-2|$

$|-3| = 1 - 2$

$3 = -1$

המשוואה לא מתקיימת. באופן כללי, כששני המספרים שליליים, באגף שמאל נחבר שני שליליים ונקבל מספר שלילי "גדול" שהערך המוחלט שלו גדול, ובאגף ימין נחסר בין שני חיוביים ונקבל ערך קטן יותר. לכן המשוואה לא יכולה להתקיים כששניהם שליליים.

מקרה 3 - המספרים בעלי סימנים מנוגדים:

נציב $x = 2,\ y = -1$:

$|2 + (-1)| = |2| - |-1|$

$|1| = 2 - 1$

$1 = 1$

המשוואה מתקיימת! גם ההצבה ההפוכה $(x = -2,\ y = 1)$ מקיימת את המשוואה.

מסקנה: המשוואה מתקיימת רק כאשר x ו-y בעלי סימנים מנוגדים. מכאן שמכפלתם בהכרח שלילית, כלומר $x \cdot y < 0$.

פסילת שאר התשובות:

תשובה (2) - $x + y < 0$

נציב $x = 2,\ y = -1$ (מקיימים את המשוואה):

$2 + (-1) = 1 > 0$

הסכום חיובי, לא שלילי. לא נכון בהכרח.

תשובה (3) - $x < y$

עם אותה הצבה $(x = 2,\ y = -1)$:

$2 > -1$

מתקיים x גדול מ-y, לא קטן. לא נכון בהכרח.

תשובה (4) - $y < x$

נציב $x = -2,\ y = 1$ (גם הם מקיימים את המשוואה):

$1 > -2$

מתקיים x גדול מ-y, לא קטן. לא נכון בהכרח.

תשובה (1).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361

שאלה 19 - גיאומטריה - נפח גליל

השאלה: נפחו של גליל שרדיוס בסיסו r וגובהו h שווה לנפחו של גליל שרדיוס בסיסו R וגובהו H. מהו $\frac{h}{H}$?

פיתרון:

נוסחת נפח גליל:

נפח הגליל = $\pi r^2 h$

כלומר, נפח גליל שווה ל-π כפול רדיוס הבסיס בריבוע כפול הגובה.

בניית המשוואה:

נפח הגליל הראשון שווה לנפח הגליל השני:

$$\pi \times r^2 \times h = \pi \times R^2 \times H$$

פישוט:

נחלק את שני האגפים ב-π:

$$r^2 \times h = R^2 \times H$$

בידוד הביטוי $\frac{h}{H}$:

אנחנו רוצים לבודד את הביטוי $\frac{h}{H}$. נחלק את שני האגפים ב-H:

$$\frac{r^2 \times h}{H} = R^2$$

נחלק את שני האגפים ב-r^2:

$$\frac{h}{H} = \frac{R^2}{r^2}$$

תשובה (4).

שאלה 20 - הסתברות - צעצועים

השאלה: במשפחת שמעוני 7 ילדים. לכל ילד יש בובה אחת, כדור אחד ומשרוקית אחת. גלי באה לבקר את המשפחה ובחרה באקראי מהצעצועים בובה אחת, כדור אחד ומשרוקית אחת. מה הסיכוי שכל הצעצועים שבחרה גלי הם של אותו הילד?

פיתרון:

כלל חשוב: כדי לחשב את ההסתברות שכמה מאורעות בלתי תלויים יקרו יחד, כופלים את ההסתברויות של כל מאורע בנפרד.

הסיכוי שכל הצעצועים יהיו של ילד ספציפי:

נניח שאנחנו שואלים: מה הסיכוי שכל הצעצועים יהיו של דני?

הסיכוי שהבובה תהיה של דני: $\frac{1}{7}$.

הסיכוי שהכדור יהיה של דני: $\frac{1}{7}$.

הסיכוי שהמשרוקית תהיה של דני: $\frac{1}{7}$.

אלה מאורעות בלתי תלויים, לכן נכפול אותם. הסיכוי שכל הצעצועים יהיו של דני הוא $\frac{1}{7^3}$.

הסיכוי שכל הצעצועים יהיו של אותו ילד:

השאלה לא מבקשת ילד ספציפי - היא מבקשת שכל הצעצועים יהיו של **אותו** ילד, לא משנה מי הוא.

יש 7 ילדים שזה יכול להיות הם, ולכל אחד הסיכוי הוא $\frac{1}{7^3}$.

$$7 \times \frac{1}{7^3} = \frac{7}{7^3} = \frac{1}{7^2}$$

תשובה (3).

info@machon-noam.co.il 050-5277735 03-5377361