

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(1)	(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(4)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(4)	(2)	(4)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-15)

שאלה 1 - ממוצעים

השאלה:

בכיתה יש 30 ילדים, מהם 12 בנות.
הגובה הממוצע של הבנות בכיתה הוא x ס"מ, והגובה הממוצע של הבנים בכיתה הוא y ס"מ.

מה הגובה הממוצע של כל ילדי הכיתה (בנים ובנות) בס"מ?

פתרון:

נוסחת ממוצע: ממוצע = סכום כל הערכים חלקי מספר הערכים

חישוב מספר הבנים:

$$18 = 30 - 12 \text{ בנים}$$

חישוב סכום הגבהים:

$$\text{סכום גבהי הבנות: ממוצע כפול מספר הבנות} = 12x$$

$$\text{סכום גבהי הבנים: ממוצע כפול מספר הבנים} = 18y$$

$$\text{סכום כל הגבהים: } 12x + 18y$$

חישוב הממוצע הכולל:

$$\frac{12x + 18y}{30}$$

תשובה (4)



שאלה 2 - גיאומטריה

השאלה:

על פי הנתונים שבסרטוט, $AC = ?$

דרך א' - בניית משולש ישר-זווית:

מהסרטוט רואים שהקו BD אופקי, הקו AD אנכי כלפי מעלה, והקו BC אנכי כלפי מטה.

כדי למצוא את AC, נבנה משולש ישר-זווית שבו AC הוא היתר:

• המרחק האופקי בין A ל-C שווה ל-BD = 9 ס"מ

• המרחק האנכי בין A ל-C שווה ל-AD + BC = 12 = 8 + 4 ס"מ

לפי משפט פיתגורס:

$$AC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$$

$$AC = \sqrt{225} = 15$$

דרך ב' - שלשות פיתגורס:

רעיון: על מנת לחשב באמצעות פיתגורס את היתר, עלינו לדעת את אורכם של שני הניצבים. בכל אחד מהמשולשים ADE ו-BCE יש לנו רק את אורכו של אחד הניצבים. לפיכך, נחפש את אורכם של הניצבים החסרים: ניצב ED במשולש ADE וניצב BE במשולש BCE.

מציאת ED ו-BE:

הניצבים ED ו-BE מרכיבים יחד את BD שאורכו 9 ס"מ. נשים לב ששניהם משולשים ישרי זווית, ובנוסף זוויות AED ו-CEB הן זוויות קודקודיות ולכן שוות.

לפיכך, למשולשים ADE ו-BCE יש שתי זוויות שוות, ומכאן שהם דומים ויש יחס קבוע בין הצלעות.

מכיוון ש-BC (שאורכה 8 ס"מ) גדולה פי 2 מהצלע המתאימה לה AD (שאורכה 4 ס"מ), הרי שגם BE גדולה פי 2 מהצלע המתאימה לה ED.

כלומר, אם אורכה של ED הוא x ס"מ, אורכה של BE הוא 2x ס"מ.

חישוב ED ו-BE:

$$BD = ED + BE = x + 2x = 3x$$

נחלק ב-3 את שני האגפים ונקבל: $x = 3$

כלומר, אורך של ED הוא 3 ס"מ ואורך של BE הוא 6 ס"מ.

חישוב AE ו-CE באמצעות שלשות פיתגורס:

במשולש ADE הניצבים הם באורך 3 ו-4 ס"מ, ולפיכך לפי השלשה הפיתגורית המוכרת 3 : 4 : 5 אורכו של היתר AE הוא 5 ס"מ.

במשולש BCE הניצבים הם באורך 6 ו-8 ס"מ, ולפיכך לפי השלשה הפיתגורית המוכרת 6 : 8 : 10 אורכו של היתר CE הוא 10 ס"מ.

חישוב AC:

$$AC = AE + CE = 5 + 10 = 15$$

מה למדנו? משוואת פיתגורס היא כלי נפוץ בבחינה למציאת אורך קו. נזכור בעל-פה את השלשות הפיתגוריות 3 : 4 : 5 ו-6 : 8 : 10.

תשובה (1)

שאלה 3 - חזקות ומספרים ראשוניים

השאלה:

נתון: x הוא מספר ראשוני הגדול מ-2.

ערכו של הביטוי $\frac{x^{(x+1)}}{2^x}$ הוא בהכרח –

פתרון:

תובנה: מכיוון ש- x ראשוני וגדול מ-2, הרי ש- x הוא מספר אי-זוגי (כל הראשוניים מלבד 2 הם אי-זוגיים). נציב ערך ונבדוק.

בדיקה עם $x = 3$:

$$\frac{3^{(3+1)}}{2^3} = \frac{3^4}{2^3} = \frac{81}{8} = 10.125$$

זהו מספר לא שלם הגדול מ-1.

נפסול תשובות (1), (2), (4) - ולכן תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

מדוע התוצאה תמיד לא שלמה?

המונה $x^{(x+1)}$ הוא חזקה של מספר אי-זוגי, ולכן הוא אי-זוגי.

המכנה 2^x הוא חזקה של 2.

מספר אי-זוגי לעולם לא מתחלק ב-2, ולכן השבר לא יכול להיות שלם.

תשובה (3)

שאלה 4 - נוסחאות במעגל

השאלה:

בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O.

שטח הגזרה האפורה הוא π סמ"ר.

מה אורך רדיוס המעגל (בס"מ)?

פתרון:

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \text{ נוסחת שטח גזרה:}$$

זיהוי הנתונים:

מהסרטוט רואים שהגזרה היא רבע מעגל, כלומר $\alpha = 90^\circ$.

הצבה בנוסחה:

$$\pi = \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$\pi = \frac{1}{4} \cdot \pi r^2$$

נחלק ב- π :

$$1 = \frac{r^2}{4}$$

$$r^2 = 4$$

$$r = 2$$

תשובה (2)



שאלה 5 - אי-שוויונות

השאלה:

נתון:

$$x \leq y$$

$$y \leq z$$

$$z \leq x$$

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון:

ניתוח הנתונים: בכל אחת מההשוואות הנתונות מופיע הסימן " $\leq$ " (גדול-או-שווה) בין שני נעלמים. סימן זה מאפשר שתי מערכות יחסים בין הנעלמים: או שהנעלם באגף השמאלי גדול מהנעלם באגף הימני, או שהם שווים זה לזה.

בדיקת האפשרויות שהנעלמים שונים:

אם נבחן את האפשרויות שהנעלמים באגף הימני של ההשוואות הנתונות גדולים מהנעלמים באגף השמאלי, נקבל סתירה: מכיוון ש- $y > x$ וגם $y > z$, הרי ש- $z < x$. אולם זה סותר את ההשוואה השלישית, לפיה $z \leq x$.

מכאן שהאפשרויות היחידה שיכולה לקיים את שלוש ההשוואות היא שהנעלמים שווים זה לזה בערכם. לפיכך תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

דוגמה באמצעות דוגמה מספרית:

ננסה להציב ערכים שונים זה מזה לנעלמים. בהתאם לאי-השוויון הנתון $x \leq y$, נציב $x = 1$ ו- $y = 2$. בהתאם לאי-השוויון הנתון $y \leq z$, ומכיוון שהצבנו $y = 2$, נציב $z = 3$.

אולם אז קיבלנו שאי-השוויון השלישי, לפיו $z \leq x$, אינו מתקיים (שכן הצבנו $x = 1$ ו- $z = 3$, כלומר x קטן מ- z).

לעומת זאת, הצבה שכן תוכל לקיים את שלושת אי-השוויונות היא אם נציב למשל $x = y = z = 1$.

תשובה (3)



שאלה 6 - ספירה ידנית

השאלה:

הדס רשמה בשורה את כל המספרים הדו-ספרתיים.
מתחתם, בשורה שנייה, היא רשמה את סכום הספרות של כל מספר.

איזה מהמספרים הבאים הופיע **הכי מעט** פעמים בשורה השנייה?

פתרון:

גישה: בשורה השנייה מופיע סכום הספרות של המספרים שרשומים בשורה הראשונה (שמכילה את כל המספרים הדו-ספרתיים). לפיכך, עלינו למצוא לכל אחת מהתשובות כמה מספרים דו-ספרתיים קיימים שסכום הספרות שלהם שווה למספר המופיע בתשובה.

כדי לא לפספס אף מספר, נעבוד בצורה מסודרת: נתחיל מספרת העשרות 1 ונבדוק מה צריכה להיות ספרת האחדות על מנת להשלים לסכום הספרות המופיע בתשובה. נעבור לספרת העשרות 2, וכך הלאה עד שנגיע לספרת העשרות 9.

תשובה (1): 17

נספור בצורה מסודרת כמה מספרים דו-ספרתיים שסכום הספרות שלהם הוא 17:
98, 89
לפיכך, 17 מופיע **פעמיים** בשורה השנייה.

תשובה (2): 15

נספור בצורה מסודרת כמה מספרים דו-ספרתיים שסכום הספרות שלהם הוא 15:
96, 87, 78, 69
לפיכך, 15 מופיע **ארבע פעמים** בשורה השנייה.

תשובה (3): 6

נספור בצורה מסודרת כמה מספרים דו-ספרתיים שסכום הספרות שלהם הוא 6:
60, 51, 42, 33, 24, 15
לפיכך, 6 מופיע **שש פעמים** בשורה השנייה.

תשובה (4): 4

נספור בצורה מסודרת כמה מספרים דו-ספרתיים שסכום הספרות שלהם הוא 4:
40, 31, 22, 13
לפיכך, 4 מופיע **ארבע פעמים** בשורה השנייה.

מסקנה: קיבלנו ש-17 מופיע הכי מעט פעמים בשורה השנייה. לפיכך, תשובה (1) היא התשובה הנכונה.

הערה: מכיוון שנשאלנו איזה מהמספרים הופיע הכי מעט פעמים בשורה השנייה, לאחר שבדקנו את תשובה (1) וגילינו ש-17 מופיע רק פעמיים, בעת בדיקת התשובות הבאות אין צורך למצוא את המספר המדויק של הפעמים שכל אחת מהן מופיעה בשורה השנייה. מספיק שמצאנו שהמספר בתשובה מופיע יותר מפעמיים בשורה השנייה, וכבר נוכל לפסול את התשובה.

תשובה (1)

שאלה 7 - סכום זוויות במרובע

השאלה:

נתון: ABC הוא משולש שווה-שוקיים ($AB = AC$).

לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, $x = ?$

פתרון:

גישה: עלינו למצוא את ערכה של זווית x , ובתשובות ביטויים המכילים את הזוויות α ו- β . נשתמש עם איזו צורה יהיה נוח לעבוד על מנת לקשר בין הזוויות: זווית x וזווית α נמצאות בקודקודים D ו-A של מרובע ADEC, וזווית β נמצאת בצמוד לזווית הפנימית בקודקוד E של מרובע זה. לפיכך, נראה שיהיה נוח לבוא את כל הזוויות הפנימיות של המרובע באמצעות זוויות x , α ו- β וליצור משוואה על סכום זוויות פנימיות שווה ל- 360° .

מציאת זווית DEC:

מכיון שמשולש ABC הוא שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שלו שוות. לפיכך זווית $\angle ACB$ שווה ל- β .

הזווית $\angle DEC$ צמודה לזווית β ולכן שווה ל- $180^\circ - \beta$. $\angle DEC = 180^\circ - \beta$.

סכום זוויות המרובע ADEC:

נכתוב משוואה של סכום זוויות פנימיות שווה ל- 360° :

$$\alpha + \beta + x + (180^\circ - \beta) = 360^\circ$$

נפשט ונקבל:

$$\alpha + x + 180^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - \alpha$$

הערה: לאחר שמצאנו שזווית $\angle ACB$ שווה ל- β , ניתן להסיק שהישרים AC ו-DE מקבילים זה לזה, ומכאן ש- x ו- α הן זוויות סמוכות בין ישרים מקבילים, ומכאן שסכומן הוא 180° .

תשובה (2)

שאלה 8 - אחוזים

השאלה:

60% מ- x הם 12% מ- y .

לפיכך, x הוא _____ מ- y .

דרך א' - פתרון אלגברי:

תרגום למשוואה:

$$\frac{60}{100} \cdot x = \frac{12}{100} \cdot y$$

נכפול את שני האגפים ב-100 ונקבל:

$$60x = 12y$$

נחלק ב-60 את שני האגפים כדי לבדוד את x ונקבל:

$$x = \frac{12}{60} \cdot y = \frac{1}{5} \cdot y$$

קיבלנו ש- x שווה ל- $\frac{1}{5}$ מתוך y , כלומר שווה ל-20%.



דרך ב' - הצבת ערך:

$$\text{נציב } y = 100$$

$$60\% \cdot x = 12\% \cdot 100 = 12$$

$$0.6x = 12$$

$$x = 20$$

לכן:

$$\frac{x}{y} = \frac{20}{100} = 20\%$$

מה למדנו? בשאלות שמתארות במילים קשר אלגברי בין גדלים באחוזים, נרשום משוואה אלגברית שמתארת את הקשר ונפשט בהתאם למה ששאלו.

מה עוד למדנו? לזכור בעל-פה את המרת האחוזים הנפוצים לשברים.

תשובה (2)

שאלה 9 - שטחים

השאלה:

הצורה שבסרטוט מורכבת מריבועים זהים שאורך צלעותיהם 2 ס"מ.

מהו שטח האזור האפור (בסמ"ר)?

פתרון:

גישה: מכיוון שהשטח האפור אינו שטח של צורה מוכרת, יהיה נוח יותר למצוא אותו על-ידי כך שנמצא את השטח הכולל של הצורה המופיעה בסרטוט, ונחסר ממנה את השטחים הלבנים שהם שטחים של משולשים ישרי-זווית.

חישוב השטח הכולל:

הצורה כולה מורכבת מ-7 ריבועים ששטח כל אחד מהם הוא $2^2 = 4$ סמ"ר.

לפיכך שטח הצורה כולה הוא $4 \cdot 7 = 28$ סמ"ר.

חישוב שטח המשולש הלבן השמאלי-תחתון:

זהו משולש ישר זווית שאורך הניצב הקצר שלו הוא 2 ס"מ (צלע הריבוע) ואורך הניצב הארוך שלו הוא 8 ס"מ (4 צלעות ריבוע).

לפיכך שטחו הוא $8 \cdot \frac{2-8}{2} = 8$ סמ"ר.

חישוב שטח המשולשים הלבנים הימניים-עליונים:

שלושת המשולשים הלבנים בצד הימני-עליון הם משולשים ישרי זווית שאורך הניצבים שלהם הוא 2 ס"מ.

שטח כל אחד מהם שווה ל- $2 \cdot \frac{2-2}{2} = 2$ סמ"ר.

והשטח הכולל של שלושתם הוא $3 \cdot 2 = 6$ סמ"ר.

חישוב שטח האזור האפור:

השטח האפור שווה לשטח הכולל של הצורה (שהוא כאמור 28 סמ"ר) פחות השטחים של המשולשים הלבנים:

$$28 - 8 - 6 = 14 \text{ סמ"ר}$$

תשובה (4)



שאלה 10 - בעיות תנועה

השאלה:

מרוץ מכוניות נערך במסלול שעליו 4 נקודות ציון ממוספרות. המרחקים בין כל שתי נקודות ציון סמוכות שווים באורכם. במרוץ מקיפים את המסלול כמה פעמים.

מכונית א' ומכונית ב' יצאו באותו הרגע מנקודת ציון 1 והחלו לנסוע על המסלול בכיוון השעון.
מכונית א' נוסעת במהירות של 2 קמ"ש , ומכונית ב' נוסעת במהירות של 2 קמ"ש .

באיזו נקודת ציון נפגשו שתי המכוניות לראשונה (לאחר תחילת המרוץ)?

פתרון:

תובנה: מכיוון שמכונית ב' נוסעת במהירות כפולה ממכונית א', בכל רגע נתון מכונית ב' עוברת מרחק כפול ממכונית א'.

מעקב אחר המיקומים:

נסמן את המרחק בין שתי נקודות סמוכות כ- d . היקף המסלול הוא $4d$.

• כשמכונית א' עוברת d (מגיעה לנקודה 2), מכונית ב' עוברת $2d$ (מגיעה לנקודה 3).

• כשמכונית א' עוברת $2d$ (מגיעה לנקודה 3), מכונית ב' עוברת $4d$ (משלימה סיבוב וחוזרת לנקודה 1).

• כשמכונית א' עוברת $4d$ (משלימה סיבוב ומגיעה לנקודה 1), מכונית ב' עוברת $8d$ (משלימה 2 סיבובים ומגיעה לנקודה 1).

מסקנה: שתי המכוניות נפגשו לראשונה בנקודת ציון 1, כאשר מכונית א' משלימה סיבוב אחד ומכונית ב' משלימה שני סיבובים.

תשובה (1)

שאלה 11 - נוסחאות הכפל המקוצר

השאלה:

נתון: a ו- b הם מספרים שונים מ-0.

$$? = \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2$$

פתרון:

$$\text{נוסחת הכפל המקוצר: } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

הצבה בנוסחה:

$$\text{נציב } x = \frac{b}{a} \text{ ו- } y = \frac{a}{b} :$$

$$\left(\frac{b}{a} \right)^2 + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} + \left(\frac{a}{b} \right)^2$$

פישוט:

$$\frac{b^2}{a^2} + 2 \cdot \frac{ab}{ab} + \frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2} + 2 + \frac{a^2}{b^2}$$

תשובה (3)



שאלה 12 - בעיה מילולית

השאלה:

מספר בתי הספר היסודיים בנס ציונה גדול ב-2 ממספר בתי הספר היסודיים ביבנה. מספר בתי הספר היסודיים ביבנה גדול ב-9 ממספר בתי הספר היסודיים בקריית שמונה.

איזה מהמספרים הבאים יכול להיות המספר הכולל של בתי הספר היסודיים בשלוש הערים?

פתרון:

גישה: מכיוון שהשאלה "מה יכול להיות" מספר בתי הספר, ברור לנו שישנן הרבה אפשרויות למספר זה. במצב זה יהיה נוח יותר לבדוק תשובות. אולם מכיוון שהמספרים בתשובות מייצגים את המספר הכולל של בתי הספר בשלוש הערים, ובנתונים מופיעים רק קשרים בין מספר בתי הספר, לא ברור כיצד לבדוק האם התשובה מסתדרת או לא. לפיכך, נעבוד אלגברית: נבטא באמצעות נעלמים את מספר בתי הספר בערים ואת סכום בתי הספר בשלושתם, נשווה אותם לתשובות, ונבדוק האם התשובה מסתדרת.

בניית משוואה:

נסמן את מספר בתי הספר בקריית שמונה ב- x .

מספר בתי הספר ביבנה שווה ל- $x + 9$.

מספר בתי הספר בנס ציונה שווה ל- $x + 11 = (x + 9) + 2$.

לפיכך, סכום בתי הספר בשלוש הערים שווה ל:

$$x + (x + 9) + (x + 11) = 3x + 20$$

בדיקת תשובה (1): 40

אם בשלוש הערים יש 40 בתי ספר, נוכל לרשום את המשוואה:

$$3x + 20 = 40$$

נחסר 20 משני האגפים ונקבל: $3x = 20$.

נחלק ב-3 את שני האגפים ונקבל: $x = \frac{20}{3}$.

קיבלנו שערכו של x אינו מספר שלם. מצב זה אינו אפשרי, שכן x מייצג את מספר בתי הספר בקריית שמונה, ולכן חייב להיות מספר שלם. התשובה נפסלת.

בדיקת תשובה (2): 41

אם בשלוש הערים יש 41 בתי ספר, נוכל לרשום את המשוואה:

$$3x + 20 = 41$$

נחסר 20 משני האגפים ונקבל: $3x = 21$.

נחלק ב-3 את שני האגפים ונקבל: $x = 7$.

קיבלנו שערכו של x הוא מספר שלם. מצב זה אפשרי: בקריית שמונה יש 7 בתי ספר, ביבנה יש 16 בתי ספר, ובנס ציונה יש 18 בתי ספר. לפיכך 41 יכול להיות מספר בתי הספר בשלוש הערים, זוהי התשובה הנכונה. אין צורך להמשיך ולבדוק את התשובות הנותרות.

תשובה (2)

שאלה 13 - בדיקת תשובות

השאלה:

a ו- b הם שני מספרים שלמים, גדולים מ-1, ושונים זה מזה.
 c הוא מספר שלם הגדול מ- $a \cdot b$, והוא מתחלק גם ב- a וגם ב- b ללא שארית.

נר טוען: "מכאן נובע בהכרח ש- c מתחלק גם ב- $a \cdot b$ ללא שארית".

איזו משלישיות המספרים הבאות מראה שטענתו של נר שגויה?

פתרון:

גישה: נבדוק כל תשובה. אנחנו מחפשים שלישיה שבה c גדול מ- $a \cdot b$ ומתחלק ב- a וב- b (עומדת בתנאי ההתחלה), אך לא מתחלק ב- $a \cdot b$ (מפריכה את טענת נר).

בדיקת תשובה (1): $c = 18, b = 3, a = 2$

האם c גדול מ- $a \cdot b = 6$? $18 > 6$ ✓

האם c מתחלק ב- a ? $18 \div 2 = 9$ ✓

האם c מתחלק ב- b ? $18 \div 3 = 6$ ✓

האם c מתחלק ב- $a \cdot b$? $18 \div 6 = 3$ ✓

טענת נר נכונה עבור שלישיה זו - לא מפריכה.

בדיקת תשובה (2): $c = 29, b = 13, a = 3$

האם c גדול מ- $a \cdot b = 39$? $29 < 39$ ✗

השלישיה לא עומדת בתנאי ההתחלה - לא מתאימה.

בדיקת תשובה (3): $c = 36, b = 4, a = 6$

האם c גדול מ- $a \cdot b = 24$? $36 > 24$ ✓

האם c מתחלק ב- a ? $36 \div 6 = 6$ ✓

האם c מתחלק ב- b ? $36 \div 4 = 9$ ✓

האם c מתחלק ב- $a \cdot b$? $36 \div 24 = 1.5$ ✗

השלישיה עומדת בתנאי ההתחלה, אך c לא מתחלק ב- $a \cdot b$ - מפריכה את טענת נר!

תשובה (3)

הסתברות

השאלה:

בשק יש 2 כדורים אדומים ו-2 כדורים צהובים.
בחרים מתוכם באקראי שני כדורים בזה אחר זה (מבלי להחזיר).

מה הסיכוי ששני הכדורים שנבחרו צבעים שונים זה מזה?

פתרון:

בחירת הכדור הראשון:

בבחירת הכדור הראשון אין כל חשיבות לצבע הכדור שנוציא - כל האפשרויות רצויות.
לכן ההסתברות להצלחה בשלב זה היא 1.

בחירת הכדור השני:

לאחר שהוצאנו כדור אחד, נשארו בשק 3 כדורים.
מתוכם, 2 כדורים הם בצבע השונה מהכדור שהוצאנו (וכדור אחד באותו צבע).
לכן ההסתברות שהכדור השני יהיה שונה בצבעו היא $\frac{2}{3}$.

חישוב ההסתברות הכוללת:

מכיוון שאנחנו רוצים שגם הבחירה הראשונה תצליח וגם הבחירה השנייה תצליח, נכפיל את ההסתברויות:
$$1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

תשובה (1)

שאלה 15 - גליל

השאלה:

נתון גליל שגובהו 10 ס"מ ורדיוס בסיסו 3 ס"מ.
A היא נקודה כלשהי על היקף הבסיס העליון.
B היא נקודה כלשהי על היקף הבסיס התחתון.
ידוע כי אורכו של הקטע AB (בס"מ) הוא מספר שלם.

מה אורכו המקסימלי של AB (בס"מ)?

פתרון:

תובנה: המרחק בין A ל-B תלוי במיקומן על ההיקפים. נפרוס את הגליל למישור ונחשב את המרחק המקסימלי האפשרי.

מציאת המרחק האופקי המקסימלי:

המרחק האופקי בין A ל-B מקסימלי כשהן נמצאות בקצוות מנוגדים של קוטר הבסיס:
$$2 \times 3 = 6 \text{ ס"מ}$$

חישוב אורך AB המקסימלי:

באמצעות משפט פיתגורס (גובה הגליל והמרחק האופקי):
$$AB_{\max} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 36} = \sqrt{136}$$

הערכת הערך:

אנחנו יודעים ש- $\sqrt{121} = 11$ ו- $\sqrt{144} = 12$.

מכיוון ש-136 נמצא בין 121 ל-144, מתקיים:

$$11 < \sqrt{136} < 12$$

מסקנה: מכיוון שאורך AB חייב להיות מספר שלם, והערך המקסימלי האפשרי גדול מ-11 אך קטן מ-12, האורך המקסימלי השלם הוא 11 ס"מ.

תשובה (2)

שאלות ובעיות (שאלות 16-20)

שאלה 16 - קריאת תרשים

השאלה:

כמה תלמידים קיבלו באמצע השנה ציון נמוך מהציון שקיבלו בתחילת השנה?

פתרון:

זיהוי הנתונים הרלוונטיים:

לפי המקרא, חץ יורד (לבן) מייצג את התלמידים שציונם באמצע השנה היה נמוך מבתחילת השנה. המספר בתוך החץ מייצג את מספר התלמידים.

לכן, צריך לחבר את כל המספרים שמופיעים בחצים הלבנים (הפונים כלפי מטה).

חיבור המספרים בחצים הלבנים:

$$3 + 2 + 2 + 4 + 1 + 2 + 5 + 1 + 3 = 23$$

תשובה (3)

שאלה 17 - קריאת תרשים

השאלה:

בקרב התלמידים שקיבלו ציון גבוה מ-5 בתחילת השנה, מה הציון הנמוך ביותר שהתקבל באמצע השנה?

פתרון:

מה אנחנו מחפשים לראות בתרשים:

"ציון גבוה מ-5 בתחילת השנה" משמעותו המלבנים השחורים שבהם רשומים ציונים גבוהים מ-5, כלומר 6 עד 10.

"הציון הנמוך ביותר באמצע השנה" מיוצג על-ידי קצה החץ שפונה כלפי מטה.

חיפוש בתרשים:

נסתכל על החצים שפונים כלפי מטה מהציונים 6 עד 10, ונחפש את החץ שקצהו מגיע לציון הכי נמוך.

מהתבוננות על התרשים נגלה שהחץ שיוצא כלפי מטה מהציון 7 מגיע לציון 4, וגם החץ שיוצא כלפי מטה מהציון 8 מגיע לציון 4. זהו הציון הנמוך ביותר מבין כל החצים שפונים כלפי מטה (בין הציונים 6 עד 10).

מסקנה: הציון הנמוך ביותר שקיבל באמצע השנה תלמיד שקיבל מעל 5 בתחילת השנה, הוא 4.

תשובה (4)

שאלה 18 - קריאת תרשים

השאלה:

מן הציונים שהתקבלו בתחילת השנה, את הציון _____ קיבלו התלמידים הרבים ביותר.

פתרון:

מה אנחנו מחפשים לראות בתרשים:

המספר שרשום בחץ הפונה כלפי מעלה מכל מלבן שחור (שמייצג את הציון בתחילת השנה) מייצג את מספר התלמידים שקיבלו ציון גבוה יותר באמצע השנה. המספר שרשום בחץ הפונה כלפי מטה מכל מלבן שחור מייצג את מספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך יותר באמצע השנה.

מכיוון שאף תלמיד לא קיבל באמצע השנה את אותו ציון כמו בתחילת השנה, כלומר כל התלמידים או שיפרו את הציון או קיבלו ציון נמוך יותר, הרי שהסכום של המספרים שרשומים בתוך החץ שפונה כלפי מעלה ובתוך החץ שפונה כלפי מטה יהיה שווה לכלל התלמידים שקיבלו ציון זה בתחילת השנה.

בדיקת התשובות:

ציון 10: מהמלבן יוצא רק חץ כלפי מטה שבו רשום המספר 3 (שמייצג 3 תלמידים שקיבלו ציון נמוך יותר באמצע השנה). לפיכך, רשום 3 תלמידים שקיבלו 10 בתחילת השנה.

ציון 8: מהמלבן יוצא חץ כלפי מעלה שבו רשום המספר 6 (כלומר 6 תלמידים שקיבלו 8 בתחילת השנה שיפרו את ציונם באמצע השנה) וחץ כלפי מטה שבו רשום המספר 5 (כלומר 5 תלמידים שקיבלו 8 בתחילת השנה וקיבלו ציון נמוך יותר באמצע השנה). לפיכך בסה"כ יש 11 תלמידים שקיבלו 8 בתחילת השנה ($6 + 5 = 11$).

ציון 6: מהמלבן יוצא חץ כלפי מעלה שבו רשום המספר 9 (כלומר 9 תלמידים שקיבלו 6 בתחילת השנה ושיפרו את ציונם באמצע השנה) וחץ כלפי מטה שבו רשום המספר 1 (כלומר תלמיד אחד שקיבל 6 בתחילת השנה וקיבל ציון נמוך יותר באמצע השנה). לפיכך בסה"כ יש 10 תלמידים שקיבלו 6 בתחילת השנה ($9 + 1 = 10$).

ציון 4: מהמלבן יוצא חץ כלפי מעלה שבו רשום המספר 1 (כלומר תלמיד אחד שקיבל 4 בתחילת השנה ושיפר את ציונו באמצע השנה) וחץ כלפי מטה שבו רשום המספר 2 (כלומר 2 תלמידים שקיבלו 4 בתחילת השנה וקיבלו ציון נמוך יותר באמצע השנה). לפיכך בסה"כ יש 3 תלמידים שקיבלו 4 בתחילת השנה ($1 + 2 = 3$).

מסקנה: מבין הציונים שהתקבלו בתחילת השנה, את הציון 8 קיבלו התלמידים הרבים ביותר (11 תלמידים).

תשובה (2)

שאלה 19 - קריאת תרשים

השאלה:

באמצע השנה קיבלו **לכל הפחות** _____ תלמידים ציון הגבוה בדיוק ב-2 מהציון שקיבלו בתחילת השנה.

פתרון:

מה אנחנו רוצים לראות בתרשים:

המידע שיש לנו בתרשים לגבי שיפור בציון בין מבחן תחילת השנה למבחן אמצע השנה, הוא גודל החץ הפונה כלפי מעלה. החץ מייצג את הציון הגבוה ביותר אליו הגיע לפחות אחד התלמידים ששיפרו את הציון.
לפיכך, נחפש כמה חצים שפונים כלפי מעלה קיימים, שמייצגים עלייה ב-2 נקודות בציון. כל חץ כזה מייצג לפחות תלמיד אחד ששיפר את ציונו ב-2 נקודות בדיוק, וכך נוכל לדעת כמה תלמידים לכל הפחות שיפרו את ציונם ב-2 נקודות.

למה לא סופרים חצים שעולים יותר מ-2 נקודות?

חץ שעולה יותר מ-2 נקודות (למשל מציון 4 עד ציון 10) מראה רק את הציון הגבוה ביותר שהושג. אי אפשר לדעת בוודאות שמישהו מהתלמידים האלה שיפר את ציונו בדיוק ב-2 נקודות - יתכן שכולם שיפרו ביותר מ-2 נקודות.

חיפוש בתרשים:

מהתבוננות על התרשים נמצא שישנם 4 חצים שפונים כלפי מעלה ושמיצגים שיפור של בדיוק 2 נקודות בציון:

- החץ מהמלבן השחור שבו רשום "1" עולה עד הציון 3
- החץ מהמלבן השחור שבו רשום "3" עולה עד הציון 5
- החץ מהמלבן השחור שבו רשום "7" עולה עד הציון 9
- החץ מהמלבן השחור שבו רשום "8" עולה עד הציון 10

כלומר, ישנם לפחות 4 תלמידים ששיפרו את ציונם ב-2 נקודות בדיוק.

תשובה (4)

שאלה 20 - קריאת תרשים

השאלה:

בתחילת השנה קיבל ליאור את הציון 6.
לפתע בכיתה התברר שחלה טעות ברישום הציונים, והציון שנרשם לליאור באמצע השנה, למעשה גבוה ב-2 מציונו האמיתי.

לאחר שתתקן הטעות, איזה מהבאים יוכל לתאר את המידע הנוגע לציון 6?

פתרון:

הבנת המצב:

ידוע לנו שליאור קיבל בתחילת השנה את הציון 6, אך הציון שנרשם לו באמצע השנה למעשה גבוה ב-2 נקודות מציונו האמיתי.
כלומר, הציון האמיתי של ליאור מתקבל לאחר תיקון הציונים **נמוך** ב-2 נקודות מהציון כפי שהופיע בתרשים המקורי.
מכיוון שאנחנו לא יודעים מה היה הציון המקורי שנרשם לליאור, ומתוך ציונו החדש לאחר ההפחתה של 2 הנקודות, יש הרבה אפשרויות לאופן שבו ייראה התרשים החדש. לפיכך, יהיה נוח יותר לבדוק תשובות.

בדיקת תשובה (1): ✓

התרשים בתשובה זו יכול להיות התרשים המתוקן. כלומר, לא היה שינוי במספר התלמידים ששיפרו את ציונם (9 תלמידים) ובמספר התלמידים שקיבלו ציון נמוך יותר (תלמיד אחד בלבד), ולא בציון הגבוה והנמוך ביותר שאותו קיבלו.
מצב זה יכול להתקיים, אם ליאור היה אחד מ-9 התלמידים ששיפרו את ציונם ממבחן תחילת השנה למבחן אמצע השנה. ציונו בתחילת השנה הוא 6. ציונו המקורי בבחינת אמצע השנה היה 9, ולאחר התיקון ציונו הוא 7.
במקרה זה הוא עדיין שייך לקבוצת התלמידים ששיפרו את ציונם, ולכן מספר התלמידים ששיפרו נותר על 9. הציון הגבוה ביותר אליו הגיע תלמיד ששיפר את הציון הוא עדיין 9, שכן חוץ מליאור היו עוד תלמידים שקיבלו 9 במבחן אמצע השנה (לפחות אחד).
לפיכך תרשים זה יכול להיות התרשים שמייצג את המידע על הציון 6 לאחר תיקון הציונים.

בדיקת תשובה (2): ✗

בתרשים זה אנחנו רואים מספר שינויים ביחס לתרשים המקורי: ראשית, במקום 9 תלמידים ששיפרו את הציון ממבחן תחילת השנה למבחן אמצע השנה יש רק 8 תלמידים ששיפרו, ובמקום תלמיד אחד שירד בציון אנחנו רואים 2. שנית, אנחנו רואים שהציון המקסימלי שאליו הגיעו התלמידים המשפרים הוא 8 (ולא כפי שהיה בתרשים המקורי), ושהציון הנמוך ביותר אליו הגיעו התלמידים שירדו בציון הוא 4 (ולא 5).
תרשים זה אינו אפשרי מכמה סיבות. אחת מהסיבות הללו היא שאם הציון המקסימלי שאליו הגיעו משפרי הציון ירד מ-9 ל-7, המשמעות היא שהציון המקורי שקיבל ליאור במבחן אמצע השנה היה 9, ולאחר התיקון הוא ירד ל-7. אולם במצב זה ליאור היה נשאר בקבוצה של משפרי הציון (הוא עלה מ-6 בבחינת תחילת השנה ל-7 בבחינת אמצע השנה), ולכן המספר של משפרי הציון (כלומר המספר שרשום על החץ שפונה כלפי מעלה) לא היה צריך להשתנות מ-1 ל-2.

בדיקת תשובה (3): ✗

בתרשים זה אנחנו רואים מספר שינויים ביחס לתרשים המקורי: ראשית, במקום 9 תלמידים ששיפרו את הציון ממבחן תחילת השנה למבחן אמצע השנה יש רק 8 תלמידים ששיפרו, ובמקום תלמיד אחד שירד בציון אנחנו רואים 2. שנית, אנחנו רואים שהציון המקסימלי שאליו הגיעו התלמידים המשפרים הוא 7 (ולא כפי שהיה בתרשים המקורי), ושהציון הנמוך ביותר אליו הגיעו התלמידים שירדו בציון הוא 3 (ולא 5).
תרשים זה אינו אפשרי מכמה סיבות. בדיוק כמו בתשובה (2), אחת מהסיבות הללו היא שאם הציון המקסימלי שאליו הגיעו משפרי הציון ירד מ-9 ל-7, המשמעות היא שהציון המקורי שקיבל ליאור במבחן אמצע השנה היה 9, ולאחר התיקון הוא ירד ל-7. אולם במצב זה ליאור היה נשאר בקבוצה של משפרי הציון (הוא עלה מ-6 בבחינת תחילת השנה ל-7 בבחינת אמצע השנה), ולכן המספר של משפרי הציון (כלומר המספר שרשום על החץ שפונה כלפי מעלה) לא היה צריך להשתנות מ-9 ל-8, והמספר של התלמידים שירדו בציונם לא היה צריך להשתנות מ-1 ל-2.

בדיקת תשובה (4): ✗

בתרשים זה אנחנו רואים מספר שינויים ביחס לתרשים המקורי: הציון המקסימלי שאליו הגיעו התלמידים המשפרים הוא 7 (ולא כפי שהיה בתרשים המקורי), והציון הנמוך ביותר אליו הגיעו התלמידים שירדו בציון הוא 3 (ולא 5).
תרשים זה אינו אפשרי מכמה סיבות. אחת מהסיבות הללו היא שאם הציון המקסימלי שאליו הגיעו משפרי הציון ירד מ-9 ל-7, המשמעות היא שהציון המקורי שקיבל ליאור במבחן אמצע השנה היה 9, ולאחר התיקון הוא ירד ל-7. אולם במצב זה ליאור היה נשאר בקבוצת התלמידים ששיפרו את הציון (ציונו עלה מ-6 בתחילת השנה ל-7 באמצע השנה), ולכן הציונים של התלמידים שציונם ירד במבחן אמצע השנה (החץ שפונה כלפי מטה) לא אמורים להשתנות.

תשובה (1)