מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(4)	(3)	(3)	(2)	(2)	(2)	(3)	(3)	(4)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(1)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(3)	(3)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - אלגברה - מספרים עוקבים, בדיקת תשובות

השאלה: a ו-b הם מספרים עוקבים $(a < b)$.

נתון: $4a = 3b$

$? = b$

פיתרון:

דרך א': אלגברה

מכיוון ש-a ו-b הם מספרים עוקבים וכן $a < b$, הרי ש-$b = a + 1$.

נציב במשוואה $4a = 3b$ ונקבל: $4a = 3(a + 1)$

נפתח סוגריים: $4a = 3a + 3$

נחסר $3a$ משני האגפים, ונקבל: $a = 3$

מכיוון ש-$b = a + 1$, הרי ש-$b = 4$.

דרך ב': בדיקת תשובות

נבדוק את התשובות המוצעות. לכל ערך של b נמצא את a (המספר העוקב הקטן ממנו) ונבדוק האם $4a = 3b$.

תשובה (1): $b = 9$. אם $b = 9$ אז $a = 8$.
נבדוק: $4a = 4 \cdot 8 = 32$, ואילו $3b = 3 \cdot 9 = 27$.
מכיוון ש-$32 \neq 27$, זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2): $b = 8$. אם $b = 8$ אז $a = 7$.
נבדוק: $4a = 4 \cdot 7 = 28$, ואילו $3b = 3 \cdot 8 = 24$.
מכיוון ש-$28 \neq 24$, זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): $b = 6$. אם $b = 6$ אז $a = 5$.
נבדוק: $4a = 4 \cdot 5 = 20$, ואילו $3b = 3 \cdot 6 = 18$.
מכיוון ש-$20 \neq 18$, זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (4): $b = 4$. אם $b = 4$ אז $a = 3$.
נבדוק: $4a = 4 \cdot 3 = 12$, וכן $3b = 3 \cdot 4 = 12$.
מכיוון ש-$12 = 12$, זו התשובה הנכונה. ✓

תשובה (4).

שאלה 2 - גיאומטריה - מצולעים, שטח והיקף

השאלה: איזה מהמצולעים הבאים הוא מצולע שאפשר לחשב את היקפו, אם נתון רק שטחו?

פיתרון:

נבדוק את התשובות המוצעות.

תשובה (1): מלבן. גם אם נתון שטחו של המלבן, הרי שמכיוון שהנוסחה לחישוב השטח תלויה בשני פרמטרים בלתי תלויים (אורך ורוחב), ויש אינסוף זוגות של אורך ורוחב שמכפלתם שווה לשטח נתון, הרי שמהשטח לבדו לא ניתן לחשב את ההיקף.

תשובה (2): טרפז שווה-שוקיים. גם אם נתון שטחו של הטרפז, הרי שמכיוון שהנוסחה לחישוב השטח תלויה בשלושה פרמטרים בלתי תלויים (שני בסיסים וגובה), ויש אינסוף שילובים של ערכים אלה שייתנו את אותו השטח, הרי שמהשטח לבדו לא ניתן לחשב את ההיקף.

תשובה (3): משולש ישר-זווית. גם אם נתון שטחו של המשולש, הרי שמכיוון שהנוסחה לחישוב השטח תלויה בשני פרמטרים בלתי תלויים (שני הניצבים), ויש אינסוף זוגות של ניצבים שייתנו את אותו השטח, הרי שמהשטח לבדו לא ניתן לחשב את ההיקף.

תשובה (4): משולש שווה-צלעות. במשולש שווה-צלעות כל הצלעות שוות, ולכן יש רק פרמטר אחד: אורך הצלע.

הנוסחה לשטח משולש שווה-צלעות היא $S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$, כאשר a הוא אורך הצלע.

מכיוון שהפרמטר היחיד המכתיב את שטח המשולש שווה-הצלעות הוא אורך הצלע, הרי שמתוך השטח ניתן למצוא את אורך הצלע באופן יחיד, ובעזרתו לחשב את ההיקף $(3a)$.

✓ זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

שאלה 3 - בעיות - ספירה ידנית (מינימום/מקסימום)

השאלה: לאפרת יש 3 מפתחות ו-3 דלתות (בניין, דירה, חדר). לכל דלת מפתח אחר. היא אינה זוכרת איזה מפתח פותח איזו דלת, ואינה מנסה לפתוח דלת במפתח שכבר יודעת שאינו מתאים לה.
כמה ניסיונות לפתיחת דלת במפתח תעשה אפרת, **לכל היותר**, עד שתיכנס לחדרה (גם ניסיון מוצלח נחשב ניסיון)?

פיתרון:

נשאלנו מהו מספר הניסיונות **המרבי**, כלומר במקרה הגרוע ביותר. נשים לב שגם ניסיון מוצלח נחשב ניסיון.

דלת הבניין (דלת ראשונה):

לאפרת 3 מפתחות. במקרה הגרוע, היא תנסה 2 מפתחות שלא מתאימים, ואז תדע בוודאות שהמפתח השלישי הוא הנכון.
סה"כ: 2 ניסיונות כושלים + 1 ניסיון מוצלח = **3 ניסיונות**.

דלת הדירה (דלת שנייה):

נותרו 2 מפתחות. במקרה הגרוע, היא תנסה מפתח אחד שלא מתאים, ואז תדע בוודאות שהמפתח השני הוא הנכון.
סה"כ: 1 ניסיון כושל + 1 ניסיון מוצלח = **2 ניסיונות**.

דלת החדר (דלת שלישית):

נותר מפתח אחד בלבד. אפרת יודעת בוודאות שהוא המפתח הנכון.
סה"כ: 0 ניסיונות כושלים + 1 ניסיון מוצלח = **1 ניסיון**.

לסיכום: מספר הניסיונות המרבי הוא 3 + 2 + 1 = **6** ניסיונות.

✓ זו התשובה הנכונה.

תשובה (3).

שאלה 4 - בעיות - קצב עבודה משותפת

השאלה: דביר והראל אוכלים גלידה, כל אחד בקצב קבוע משלו. קצב האכילה של דביר גדול פי 2 מקצב האכילה של הראל. יחד הם מסיימים לאכול $\frac{1}{4}$ קופסת גלידה ב-10 דקות. בכמה דקות היה הראל מסיים לאכול קופסת גלידה שלמה, אילו היה אוכל לבדו?

פיתרון:

אם יחד הם אוכלים $\frac{1}{4}$ קופסה ב-10 דקות, הרי שיחד הם אוכלים קופסה שלמה בזמן גדול פי 4, כלומר ב-40 דקות.

נתון כי קצב האכילה של דביר גדול פי 2 מקצב האכילה של הראל, כלומר דביר שקול ל-2 "הראלים".

מכאן שכאשר דביר והראל אוכלים יחד, זה שקול ל-3 "הראלים" (2 + 1 = 3).

מצאנו כי 3 "הראלים" אוכלים קופסה שלמה ב-40 דקות.

ולפיכך, להראל אחד יידרש זמן גדול פי 3, כלומר: 40 · 3 = 120 דקות.

תשובה (3).

שאלה 5 - אלגברה - ראשוניים, ספירה

השאלה: כמה מספרים חיוביים דו-ספרתיים מקיימים את שני התנאים הבאים?
א. סכום הספרות של המספר שווה ל-5
ב. המספר ראשוני

פיתרון:

עלינו למצוא כמה מספרים דו-ספרתיים חיוביים מקיימים את שני התנאים המופיעים בשאלה: סכום ספרותיהם שווה ל-5, והם ראשוניים. לפי התשובות אין הרבה מספרים כאלו, לכן נבדוק ידנית את כל האפשרויות: נבחר בכל פעם את ספרת האחדות של המספר, נסיק מכך מה צריכה להיות ספרת העשרות (הספרה שמשלימה לסכום של 5), ונבדוק האם המספר המתקבל הוא ראשוני.

אם ספרת האחדות היא 0, הרי שספרת העשרות היא 5, כלומר המספר הדו-ספרתי הוא 50. 50 אינו מספר ראשוני (הוא מתחלק, בין היתר, ב-2), ולכן הוא לא עומד בתנאים המפורטים בשאלה.

אם ספרת האחדות היא 1, הרי שספרת העשרות היא 4, כלומר המספר הדו-ספרתי הוא 41. 41 הוא מספר ראשוני, ולכן הוא עומד בתנאים המפורטים בשאלה. נספור אפשרות זו.

אם ספרת האחדות היא 2, הרי שספרת העשרות היא 3, כלומר המספר הדו-ספרתי הוא 32. 32 אינו מספר ראשוני (הוא מתחלק, בין היתר, ב-2), ולכן הוא לא עומד בתנאים המפורטים בשאלה.

אם ספרת האחדות היא 3, הרי שספרת העשרות היא 2, כלומר המספר הדו-ספרתי הוא 23. 23 הוא מספר ראשוני, ולכן הוא עומד בתנאים המפורטים בשאלה. נספור אפשרות זו.

אם ספרת האחדות היא 4, הרי שספרת העשרות היא 1, כלומר המספר הדו-ספרתי הוא 14. 14 אינו מספר ראשוני (הוא מתחלק, בין היתר, ב-2), ולכן הוא לא עומד בתנאים המפורטים בשאלה.

לא תיתכן ספרת אחדות גדולה מ-4, ומכאן אנו יודעים לעצור מכיוון שבדקנו את כל האפשרויות. מצאנו שני מספרים שעומדים בתנאים המפורטים בשאלה: 41 ו-23, ולפיכך תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

מה למדנו? חשוב להכיר בעל-פה את המספרים הראשוניים עד 43.

תשובה (2).

שאלה 6 - אלגברה - מספרים דו-ספרתיים, משוואות

השאלה: האותיות A, B, C ו-D מייצגות ספרות בין 1 ל-9 (לאו דווקא שונות זו מזו), כך ש-AB, BA ו-CD הם מספרים דו-ספרתיים.
נתון: AB + BA = CD
? = C − D

פיתרון:

דרך א': הצבת דוגמה מספרית

ננסה דוגמה: נציב A = 1, B = 2. במקרה כזה, נקבל:
AB = 12, BA = 21.
נחשב: AB + BA = 12 + 21 = 33.
כלומר CD = 33, ומכאן C = 3, D = 3.
נקבל: C − D = 3 − 3 = 0.

ננסה דוגמה נוספת לוודא: נציב A = 2, B = 5. במקרה כזה, נקבל:
AB = 25, BA = 52.
נחשב: AB + BA = 25 + 52 = 77.
כלומר CD = 77, ומכאן C = 7, D = 7.
נקבל: C − D = 7 − 7 = 0.

נראה שבכל מקרה C = D, ולכן C − D = 0.

דרך ב': אלגברה

המספר הדו-ספרתי AB שווה ל-10A + B (כי A היא ספרת העשרות ו-B היא ספרת האחדות). באופן דומה, BA שווה ל-10B + A.

נחבר את שני המספרים:
AB + BA = (10A + B) + (10B + A) = 11A + 11B = 11(A + B)

מכאן שהמספר CD הוא מכפלה של 11. המספרים הדו-ספרתיים שהם מכפלות של 11 הם: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99.

בכל המספרים הללו, ספרת העשרות שווה לספרת האחדות, כלומר C = D.

ולפיכך: C − D = 0.

תשובה (2).

שאלה 7 - גיאומטריה - מערכת צירים, פעולות על נקודות

השאלה: לכל נקודה (x,y) במערכת צירים הוגדרה הפעולה $ כך: $(x,y) = (y,x)$.
במערכת הצירים שלפניכם מסורטט משולש.
מה יתקבל אם נפעיל את הפעולה $ על הנקודות שבשטחו?

פיתרון:

עלינו לקבוע איזה מהמשולשים המופיעים בתשובות יתקבל לאחר שנפעיל את הפעולה $ על הנקודות שבשטחו של המשולש הנתון. נתון שהפעולה $ המופעלת על נקודה כלשהי (x, y) מוגדרת באופן הבא: $(x, y) = (y, x)$. נבין את הפעולה באופן מילולי: הפעלת $ על נקודה כלשהי הופכת את הסדר של שיעורי הנקודה: מה שהיה שיעור ה-x הופך להיות שיעור ה-y, ומה שהיה שיעור ה-y הופך להיות שיעור ה-x.

ראשית, נחשוב כיצד לגשת לשאלה: אין לנו יכולת לבדוק מה קורה לכל נקודה ונקודה בתוך שטח המשולש לאחר הפעלת הפעולה $ עליה משום שמדובר במספר גדול של נקודות, אולם גם אין בכך צורך. מספיק שנבין כיצד משתנה מיקומם של קודקודי המשולש על מנת שנוכל לקבוע מה התשובה הנכונה.

שנית, מכיוון שאין לנו את השיעורים המדויקים של הקודקודים יש הרבה אפשרויות למיקומם, נוכל להציב עבור שיעורים אלו דוגמה מספרית מהראש ולפסול בעזרתה תשובות.

נסתכל על הסרטוט של המשולש בשאלה ונציב שיעורים המתאימים לסרטוט:

- קודקוד A על ציר y החיובי: (0, 2)
- קודקוד B בראשית הצירים: (0, 0)
- קודקוד C על ציר x החיובי: (2, 0)

כעת נבדוק מה מיקומו של כל אחד מהקודקודים לאחר שמופעלת עליו הפעולה $:

קודקוד A ← לאחר שמופעלת עליו הפעולה $ נקבל: $(0,2) = (2,0)$.
קודקוד B ← לאחר שמופעלת עליו הפעולה $ נקבל: $(0,0) = (0,0)$ (כלומר מיקומו לא משתנה).
קודקוד C ← לאחר שמופעלת עליו הפעולה $ נקבל: $(2,0) = (0,2)$.

כדי להבין איזה מהסרטוטים בתשובות מתאים לערכים שקיבלנו, נסרטט בעצמנו את המשולש החדש שהתקבל לאחר שינוי מיקומי הקודקודים: המשולש נשאר ברביע הראשון, אבל הקודקוד שהיה על ציר y (למעלה) עבר לציר x (ימינה), והקודקוד שהיה על ציר x (ימינה) עבר לציר y (למעלה).

לפיכך תשובה (2) היא התשובה הנכונה.

הערה: הסרטוט לא חייב להיות מדויק מידה או מדויק על מנת שנוכל לפתור את השאלה. מספיק שנסרטט "בערך" כדי להבין באיזה רביע של מערכת הצירים נמצא המשולש המעודכן שהתקבל לאחר הפעלת הפעולה $, ומה מיקום הקודקודים זה ביחס לזה.

תשובה (2).

שאלה 8 - גיאומטריה - קווים וזוויות, משולש

השאלה: בסרטוט שלפניכם שלושה ישרים שכל שניים מהם נחתכים בנקודה אחרת.
נתון: $\beta = 2\alpha$
לפי נתון זה, מה אפשר לדעת בוודאות על היחס בין זווית γ לזווית α?

פיתרון:

עלינו לקבוע מהי מערכת היחסים הנכונה בין הזוויות α ו-γ: האם אחת גדולה מהשנייה (ואם כן - איזו מהן), או שהן שוות, או שאי אפשר לדעת על פי הנתונים. נחשוב עם איזו צורה יהיה נוח לעבוד על מנת לקשר בין הזוויות.

שלוש הזוויות שבסרטוט - α, β ו-γ - סמוכות לאותו המשולש. נסמן אותו לצורך ההסבר ב-ABC.

נתון ש-$\beta = 2\alpha$.

כעת נחפש את הקשר בין α ו-γ. הזווית הפנימית של משולש ABC בקודקוד A היא זווית קודקודית ל-α ולכן שווה לה.

כעת הקשר בין α ו-γ ברור: הזווית 2α בקודקוד B היא זווית חיצונית למשולש ABC, ולכן שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה. נרשום זאת בצורה של משוואה: $\gamma + \alpha = 2\alpha$. נחסר α משני האגפים ונקבל: $\gamma = \alpha$.

לפיכך תשובה (3) היא התשובה הנכונה.

מה למדנו? בגאומטריה נחשוב עם איזו צורה לעבוד, ולעיתים קרובות נרכז את הנתונים באותה הצורה.

תשובה (3).

הסקה מטבלה (שאלות 9-12)

שאלה 9 - הסקה מתרשים

השאלה: מיכל נמצאת באחת מנקודות המסומנות בתרשים ורואה שנשארו לה 3.5 שעות הליכה משוערות עד לאחת מנקודות הלינה הקרובות.
באיזו נקודה היא נמצאת?

פיתרון:

עלינו לזהות באיזו נקודה במסלול מיכל נמצאת. ידוע שנותרו לה 3.5 שעות הליכה עד לנקודת לינה קרובה.

נתחיל בחיפוש בטבלת זמני ההליכה: נחפש תאים שבהם מופיע הערך 3.5 שעות. בטבלה קיימים שני תאים כאלה, ושניהם בשורה העליונה (הליכה עם כיוון השעון): מ-H ל-I ומ-I ל-A.

כעת נבחן את התרשים כדי לבדוק אילו מנקודות היעד הן נקודות לינה. נקודה I מסומנת בסמל בית ולכן היא נקודת לינה, ואילו נקודה A אינה נקודת לינה.

מכאן נובע שמיכל נמצאת בנקודה H, צועדת עם כיוון השעון, ולפניה 3.5 שעות הליכה עד לנקודה I שהיא נקודת לינה.

תשובה (3).

שאלה 10 - הסקה מתרשים

השאלה: גיא מתכנן ללכת 8 שעות לכל היותר (לפי זמני ההליכה המשוערים המוצגים בתרשים) ולהישאר כל הזמן מתחת לגובה של 2,000 מטרים.
איזה מהמסלולים הבאים עשוי להתאים לתוכניתו של גיא?

פיתרון:

על גיא לעמוד בשני תנאים: זמן הליכה של עד 8 שעות, ושהייה בגובה מתחת ל-2,000 מטר לאורך כל המסלול.

ראשית נזהה אילו נקודות במסלול נמצאות בגובה 2,000 מטר או יותר: נקודה H (2,200 מטר) ונקודה D (2,400 מטר). יש להימנע ממעבר בנקודות אלו.

נבדוק את התשובות:

<u>תשובה (1)</u>: מ-A ל-C עם כיוון השעון (A→B→C).
זמן: 3 + 5.5 = 8.5 שעות - חורג מ-8 שעות. ✗

<u>תשובה (2)</u>: מ-B ל-D עם כיוון השעון (B→C→D).
המסלול עובר דרך נקודה D שגובהה 2,400 מטר. ✗

<u>תשובה (3)</u>: מ-A ל-H נגד כיוון השעון (A→I→H).
המסלול מסתיים בנקודה H שגובהה 2,200 מטר. ✗

<u>תשובה (4)</u>: מ-B ל-I נגד כיוון השעון (B→A→I).
זמן: 2.5 + 3.5 = 6 שעות - עומד בתנאי הזמן. ✓
גבהים לאורך המסלול: B (1,500 מ'), A (1,000 מ'), I (1,700 מ') - כולם מתחת ל-2,000. ✓

תשובה (4).

שאלה 11 - הסקה מתרשים

השאלה: יעלה מתכננת טיול מהנקודה המסומנת הגבוהה ביותר במסלול אל הנקודה המסומנת הנמוכה ביותר בו. היא בוחרת ללכת בכיוון שבו אורך הדרך בקילומטרים קצר יותר.
מהו זמן ההליכה המשוער (בשעות) בדרך שבה בחרה יעלה?

פיתרון:

ראשית נזהה את נקודות המוצא והיעד:
• הנקודה הגבוהה ביותר: D (2,400 מטר)
• הנקודה הנמוכה ביותר: A (1,000 מטר)

כעת נחשב את אורך הדרך בקילומטרים בכל אחד מהכיוונים:

<u>עם כיוון השעון (D→E→F→G→H→I→A):</u>
אורך: 8 + 15 + 12 + 14 + 9 + 7 = 65 ק"מ

<u>נגד כיוון השעון (D→C→B→A):</u>
אורך: 6 + 16 + 7 = 29 ק"מ

הדרך הקצרה יותר היא נגד כיוון השעון (29 ק"מ), ולכן יעלה תבחר בכיוון זה.

נחשב את זמן ההליכה המשוער בדרך זו (לפי הטבלה התחתונה - הליכה נגד כיוון השעון):
D→C: 2.75 שעות
C→B: 5.5 שעות
B→A: 2.5 שעות

סה"כ: 2.75 + 5.5 + 2.5 = 10.75 שעות

תשובה (3).

שאלה 12 - הסקה מתרשים

השאלה: לילך הלכה במסלול במשך 4 ימים מנקודה H לנקודה B, נגד כיוון השעון. בלילות היא לנה בנקודות הלינה שהיו בדרכה.
איזה מהתרשימים הבאים הוא המתאים ביותר להצגת מספר הקילומטרים שהלכה בכל יום?

פיתרון:

עלינו למצוא את התרשים המתאים למספר הקילומטרים שהלכה לילך בכל יום. נתון שלילך הלכה מנקודה H לנקודה B נגד כיוון השעון, ושבלילות היא לנה בנקודות הלינה שבדרכה.

נחשוב מה אנחנו מחפשים: נתחיל מנקודה H, נעבור על המסלול נגד כיוון השעון, ובכל נקודה שיש בה נקודת לינה נבין שלילך עצרה ללון בה (ולפיכך באותה נקודה מסתיים יום ההליכה במסלול שלה), ונבדוק כמה ק"מ היא הלכה באותו יום.

<u>יום 1:</u> לילך מתחילה בנקודה H והולכת נגד כיוון השעון, ומגיעה לנקודה G. נקודה G היא נקודת לינה, ולכן לילך עוצרת ללון בה. מרחק H → G = 14 ק"מ.

<u>יום 2:</u> לילך יוצאת מנקודה G וממשיכה נגד כיוון השעון. היא מגיעה לנקודה F, אולם נקודה זו אינה נקודת לינה, ולכן היא ממשיכה הלאה לנקודה E. נקודה E היא נקודת לינה, ולכן היא עוצרת ללון בה. מרחק G → F = 12 ק"מ, ומרחק F → E = 15 ק"מ. סה"כ ביום השני: 12 + 15 = 27 ק"מ.

יום 3: לילך יוצאת מנקודה E וממשיכה נגד כיוון השעון. היא מגיעה לנקודה D, אולם נקודה זו אינה נקודת לינה, ולכן היא ממשיכה הלאה לנקודה C. נקודה C היא נקודת לינה, ולכן היא עוצרת ללון בה. מרחק E → D = 8 ק"מ, ומרחק D → C = 6 ק"מ. סה"כ ביום השלישי: 8 + 6 = 14 ק"מ.

יום 4: לילך יוצאת מנקודה C וממשיכה נגד כיוון השעון. היא מגיעה לנקודה B, שהיא נקודת לינה וגם סוף המסלול שלה. מרחק C → B = 16 ק"מ.

סיכום המרחקים: יום 1 = 14 ק"מ, יום 2 = 27 ק"מ, יום 3 = 14 ק"מ, יום 4 = 16 ק"מ.

אנחנו מחפשים תרשים שהעמודות של היום הראשון והשלישי שוות בגובהן, העמודה של היום השני גבוהה מהן באופן משמעותי, והעמודה של היום הרביעי גבוהה מהן בקצת (אך נמוכה יותר מהעמודה של היום השני). התרשים היחיד שמתאים לתיאור זה הוא התרשים המופיע בתשובה (1).

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - גיאומטריה - טרפז, שטחי משולשים

השאלה: בסרטוט שלפניכם ABCD הוא טרפז (AD||BC).
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, מה היחס בין שטח המשולש ABD לשטח המשולש DBC?

פיתרון:

נתון שהבסיס העליון AD = a והבסיס התחתון BC = b, וכן AD || BC.

נחשב את שטחי שני המשולשים באמצעות הנוסחה: שטח = ½ · בסיס · גובה.

משולש ABD:
הבסיס הוא AD = a. הגובה הוא המרחק מהקודקוד B לישר AD.

משולש DBC:
הבסיס הוא BC = b. הגובה הוא המרחק מהקודקוד D לישר BC.

מכיוון ש-AD || BC (הבסיסים מקבילים), המרחק מכל נקודה על הישר BC לישר AD שווה למרחק מכל נקודה על הישר AD לישר BC. מרחק זה הוא גובה הטרפז, ונסמנו h.

לכן:
- שטח משולש ABD = ½ · a · h
- שטח משולש DBC = ½ · b · h

נחשב את היחס:

$$\frac{\text{שטח ABD}}{\text{שטח DBC}} = \frac{h \cdot a \cdot ½}{h \cdot b \cdot ½} = \frac{a}{b}$$

היחס בין השטחים הוא a : b.

תשובה (1).

שאלה 14 - בעיות - טווחים

השאלה: רועי נרשם ל-6 קורסים, שבכל אחד מהם יש 5 מפגשים. רועי נכשל בכל קורס שבו השתתף ב-2 מפגשים או פחות, והצליח בכל קורס שבו השתתף ב-3 מפגשים או יותר. ידוע שרועי נכשל ב-3 קורסים והצליח ב-3 קורסים.
רועי השתתף לכל הפחות ב-___ מפגשים ולכל היותר ב-___ מפגשים.

פיתרון:

נסכם את הנתונים:
- 6 קורסים, בכל קורס 5 מפגשים
- כישלון בקורס = השתתפות ב-0, 1 או 2 מפגשים
- הצלחה בקורס = השתתפות ב-3, 4 או 5 מפגשים
- רועי נכשל ב-3 קורסים והצליח ב-3 קורסים

<u>חישוב המינימום:</u>
כדי למזער את מספר המפגשים הכולל, נבחר את מספר המפגשים המינימלי בכל קורס:
- ב-3 הקורסים שבהם נכשל: 0 מפגשים בכל אחד (המינימום לכישלון) → $0 \times 3 = 0$
- ב-3 הקורסים שבהם הצליח: 3 מפגשים בכל אחד (המינימום להצלחה) → $3 \times 3 = 9$

מינימום = 0 + 9 = 9 מפגשים

<u>חישוב המקסימום:</u>
כדי למקסם את מספר המפגשים הכולל, נבחר את מספר המפגשים המקסימלי בכל קורס:
- ב-3 הקורסים שבהם נכשל: 2 מפגשים בכל אחד (המקסימום לכישלון) → $2 \times 3 = 6$
- ב-3 הקורסים שבהם הצליח: 5 מפגשים בכל אחד (המקסימום להצלחה) → $5 \times 3 = 15$

מקסימום = 6 + 15 = 21 מפגשים

תשובה (1).

שאלה 15 - אלגברה - שברים, יחסים

השאלה: קרן, שלומית ותמרה חילקו ביניהן ערימה של מטבעות.

נתון: מספר המטבעות שקיבלה קרן / מספר המטבעות שקיבלה תמרה = $\frac{5}{9}$

מספר המטבעות שקיבלה שלומית / מספר המטבעות שקיבלה תמרה = $\frac{5}{12}$

מצא: מספר המטבעות שקיבלו קרן ושלומית יחד / מספר המטבעות שקיבלה תמרה = ?

פיתרון:

נשים לב שבשני היחסים הנתונים, המכנה זהה - מספר המטבעות שקיבלה תמרה.

לכן ניתן לחבר את השברים ישירות:

(מספר המטבעות של קרן + מספר המטבעות של שלומית) / מספר המטבעות של תמרה
= (מטבעות קרן / מטבעות תמרה) + (מטבעות שלומית / מטבעות תמרה)

$$= \frac{5}{9} + \frac{5}{12}$$

כדי לחבר את השברים, נמצא מכנה משותף ל-9 ול-12.
המכנה המשותף הקטן ביותר הוא 36.

נרחיב את השברים:

(הרחבנו ב-4) $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

(הרחבנו ב-3) $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

נחבר:

$\frac{5}{9} + \frac{5}{12} = \frac{20}{36} + \frac{15}{36} = \frac{35}{36}$

תשובה (4).

שאלה 16 - אלגברה - אי-שוויונות

השאלה: נתון: $a > 0, \frac{3a - 21}{2a + 1} < 0$

איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון בהכרח?

פיתרון:

נתון ש-$a > 0$. נבחן את סימן המכנה:

אם $a > 0$, אז $2a > 0$, ולכן $2a + 1 > 0$.

כלומר, המכנה תמיד חיובי.

נתון שהשבר שלילי: $\frac{3a - 21}{2a + 1} < 0$

כדי ששבר יהיה שלילי, המונה והמכנה צריכים להיות בעלי סימנים מנוגדים.

מכיוון שהמכנה חיובי, המונה חייב להיות שלילי:

$3a < 0 - 21$

$3a > 21$

$a > 7$

לכן $a > 7$.

תשובה (4).

שאלה 17 - אלגברה - עצרת וחזקות

השאלה: עבור כל מספר שלם וחיובי k, הביטוי $(k!)\cdot 2^k$ שווה למכפלת כל המספרים ה-___

פיתרון:

נבדוק באמצעות הצבת ערך. ניקח $k = 3$:

$(k!)\cdot 2^k = 3!\cdot 2^3 = 6\cdot 8 = 48$

נבדוק את התשובות:

(1) שלמים מ-1 עד 2k, כלומר מ-1 עד 6:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$

התוצאה אינה 48, ולכן תשובה זו נפסלת.

(2) זוגיים מ-2 עד 2k, כלומר מ-2 עד 6:

$2\cdot 4\cdot 6 = 48$ ✓

(3) שלמים מ-1 עד k!, כלומר מ-1 עד 6:

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$

התוצאה אינה 48, ולכן תשובה זו נפסלת.

(4) זוגיים מ-2 עד k!, כלומר מ-2 עד 6:
$2\cdot4\cdot6 = 48$ ✓

קיבלנו שתי תשובות מתאימות - (2) ו-(4). יש צורך בהצבה נוספת כדי להכריע ביניהן.

נציב $k = 2$:
$(k!)\cdot2^k = 2!\cdot2^2 = 2\cdot4 = 8$

(2) זוגיים מ-2 עד 2k, כלומר מ-2 עד 4:
$2\cdot4 = 8$ ✓

(4) זוגיים מ-2 עד k!, כלומר מ-2 עד 2:
2
התוצאה אינה 8, ולכן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2).

שאלה 18 - בעיות - ממוצעים

השאלה: הגובה הממוצע של אורית, בתיה וגילי נמוך ב-4 ס"מ מן הגובה הממוצע של כל הילדים בכיתתן. גובהה של אורית נמוך ב-6 ס"מ מן הגובה הממוצע בכיתה.
הגובה הממוצע של בתיה וגילי ___ מן הגובה הממוצע בכיתה.

פיתרון:

כל הנתונים מתייחסים להפרשים מהממוצע בכיתה, לכן נוח להציב מספר עגול לממוצע הכיתה ולחשב באמצעותו.

נניח שהגובה הממוצע בכיתה הוא 10 ס"מ.

מהנתונים:
- הממוצע של אורית, בתיה וגילי הוא 6 ס"מ = (10 − 4)
- גובה אורית הוא 4 ס"מ = (10 − 6)

כדי למצוא את ממוצע הגבהים של בתיה וגילי, עלינו למצוא את סכום הגבהים שלהן.

סכום הגבהים של שלושתן הוא 18 ס"מ = (3 · 6).
גובה אורית הוא 4 ס"מ, ולכן סכום הגבהים של בתיה וגילי הוא 14 ס"מ = (18 − 4).

ממוצע הגבהים של בתיה וגילי: $\frac{14}{2}$ = 7 ס"מ

ממוצע הכיתה הוא 10 ס"מ וממוצע בתיה וגילי הוא 7 ס"מ, כלומר נמוך ב-3 ס"מ מהממוצע בכיתה.

תשובה (3).

שאלה 19 - גיאומטריה - מעגל ומלבן

השאלה: בסרטוט שלפניכם מעגל שמרכזו O ורדיוסו r, ומלבן ABCD. הצלע BC משיקה למעגל בנקודה E. הישר OD חותך את הצלע BC בנקודה F.

נתון: EC = CD = 2r

לפי נתונים אלו, EF = ?

פיתרון:

מכיוון ש-BC משיקה למעגל בנקודה E, הרדיוס OE מאונך ל-BC (משפט: רדיוס מאונך למשיק בנקודת ההשקה). לכן משולש OEF הוא משולש ישר זווית.

בנוסף, משולש DCF הוא משולש ישר זווית (זווית C היא זווית ישרה של המלבן ABCD).

הזוויות בקודקוד F שוות זו לזו (זויות קודקודיות), ולכן משולשים OEF ו-DCF הם משולשים דומים.

<u>זיהוי הצלעות המתאימות:</u>

במשולשים דומים, צלעות מתאימות הן צלעות הנמצאות נגדיות לזוויות שוות.

בכל משולש ישר זווית יש שני ניצבים ויתר. נזהה את הצלעות המתאימות:

- הצלעות OE ו-DC מתאימות (שתיהן ניצבים הנגדיים לזווית F)
- הצלעות OF ו-DF מתאימות (שתיהן היתר)
- הצלעות EF ו-CF מתאימות (שתיהן הניצב שנותר בכל משולש)

<u>מציאת היחס בין המשולשים:</u>

הצלע OE במשולש OEF היא הרדיוס ולכן שווה ל-r.

הצלע DC במשולש DCF שווה ל-2r (נתון).

לכן היחס בין הצלעות המתאימות הוא 1:2, כלומר צלע DC גדולה פי 2 מצלע OE.

<u>חישוב EF:</u>

מכיוון שבין כל שתי צלעות מתאימות במשולשים דומים יחס קבוע, הרי שצלע CF גדולה פי 2 מהצלע EF.

נסמן את אורך EF ב-x. אם כן, אורך CF הוא 2x.

סכום אורכי EF ו-CF שווה ל-EC, ולפי הנתון EC שווה ל-2r.

מכאן ש-x + 2x = 2r, כלומר 3x = 2r.

נחלק ב-3: $x = \frac{2r}{3}$

מכיוון שסימנו את EF ב-x, הרי שאורך EF הוא $\frac{2r}{3}$.

תשובה (3).

שאלה 20 - אלגברה - שברים ושורשים

השאלה:

$$\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=?$$

פיתרון:

כדי לחבר את השברים, נמצא מכנה משותף.

נכפיל את המונה והמכנה של כל שבר במכנה של השבר השני:

$$\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}+\frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}$$

<u>חישוב המכנה המשותף:</u>

המכנה הוא מהצורה $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (נוסחת הכפל המקוצר השלישית).

$(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})=3^2-(\sqrt{3})^2=9-3=6$

<u>חישוב המונים:</u>

במונה של השבר השמאלי קיבלנו את $(3-\sqrt{3})$ כפול עצמו, כלומר $(3-\sqrt{3})^2$.

במונה של השבר הימני קיבלנו את $(3+\sqrt{3})$ כפול עצמו, כלומר $(3+\sqrt{3})^2$.

נפתח את הסוגריים באמצעות נוסחת הכפל המקוצר: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

$(3-\sqrt{3})^2=9-6\sqrt{3}+3=12-6\sqrt{3}$

$(3+\sqrt{3})^2=9+6\sqrt{3}+3=12+6\sqrt{3}$

<u>חיבור השברים:</u>

$$\frac{12-6\sqrt{3}}{6}+\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=\frac{12-6\sqrt{3}+12+6\sqrt{3}}{6}$$

נשים לב ש-$3\sqrt{6}$ ו-$(-3\sqrt{6})$ מתקזזים:

$$\frac{24}{6}=4$$

<u>דרך נוספת (קצרה יותר):</u>

במקום לפתוח כל סוגריים בנפרד, ניתן להשתמש בזהות:

$(a-b)^2+(a+b)^2=2a^2+2b^2$

לכן סכום המונים הוא:

$(3-\sqrt{3})^2+(3+\sqrt{3})^2=2\cdot 9+2\cdot 3=18+6=24$

ומכאן:

$$\frac{24}{6}=4$$

תשובה (4).