מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(2)	(3)	(1)	(4)	(3)	(2)	(3)	(1)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(4)	(1)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)	(3)	(4)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - אלגברה - ערך מוחלט

השאלה: a הוא מספר שלילי כלשהו.

$a + |a| = ?$

פיתרון:

הערך המוחלט של מספר הוא המרחק שלו מאפס על ציר המספרים, ולכן הוא תמיד חיובי.

עבור מספר שלילי, הערך המוחלט שלו הוא המספר הנגדי לו.

לדוגמה: אם $a = -5$, אז:

$|a| = |-5| = 5$

שימו לב ש-5 הוא המספר הנגדי ל-(−5).

נציב בביטוי:

$a + |a| = (-5) + 5 = 0$

<u>דרך נוספת:</u>

ניתן לבדוק את התשובות על ידי הצבת מספר שלילי כלשהו, למשל $a = -3$:

$a + |a| = (-3) + |-3| = (-3) + 3 = 0$

התוצאה היא 0, ולכן התשובה הנכונה היא (4).

תשובה (4).

שאלה 2 - בעיות מילוליות

השאלה: במשחק כדור יד הבקיעו שתי הקבוצות 20 שערים סך הכל.

- אביעד הבקיע בעצמו מחצית ממספר השערים שהבקיעה קבוצתו.
- מספר השערים שהבקיע אביעד קטן ב-2 ממספר השערים שהבקיעה הקבוצה המתחרה.

כמה שערים הבקיעה קבוצתו של אביעד במשחק?

פיתרון:

נבדוק כל תשובה עד שנמצא את התשובה המתאימה לשני התנאים.

<u>תשובה (1): קבוצת אביעד הבקיעה 10 שערים</u>

אביעד הבקיע מחצית מקבוצתו: 5 שערים.

סה"כ הובקעו 20 שערים, לכן הקבוצה המתחרה הבקיעה 10 = 10 − 20 שערים.

האם אביעד הבקיע פחות ב-2 מהקבוצה המתחרה? 5 = 5 − 10.
ההפרש הוא 5 ולא 2, ולכן תשובה זו נפסלת.

תשובה (2): קבוצת אביעד הבקיעה 12 שערים
אביעד הבקיע מחצית מקבוצתו: 6 שערים.
סה"כ הובקעו 20 שערים, לכן הקבוצה המתחרה הבקיעה 8 = 12 − 20 שערים.
האם אביעד הבקיע פחות ב-2 מהקבוצה המתחרה? 2 = 6 − 8. ✓
ההפרש הוא 2, בדיוק כמו שנתון בשאלה. מצאנו תשובה המתאימה לנתונים, ולכן אין צורך לבדוק את שאר התשובות.

תשובה (2).

שאלה 3 - אחוזים

השאלה: לניבי יש קופסה ובה 200 קוביות. 70% מהקוביות סגולות, ו-30% צהובות.
ניבי קיבלה עוד 40 קוביות סגולות והוסיפה אותן לקופסה.
מה אחוז הקוביות **הצהובות** בקופסה כעת?

פיתרון:

שלב 1: מציאת מספר הקוביות הצהובות בהתחלה
בהתחלה יש בקופסה 200 קוביות, ו-30% מהן צהובות.
עצה: כשעובדים עם אחוזים, קל לעבוד עם אחוזים עגולים כמו 10% או 1%.
נמצא קודם 10% מ-200, שזה 20 קוביות.
30% זה פי 3 מ-10%, לכן 60 = 3 × 20 קוביות צהובות.

שלב 2: חישוב מספר הקוביות הכולל אחרי ההוספה
ניבי הוסיפה 40 קוביות סגולות לקופסה.
לכן כעת יש בקופסה 240 = 40 + 200 קוביות סה"כ.

שלב 3: חישוב האחוז החדש של הקוביות הצהובות
שימו לב: מספר הקוביות הצהובות לא השתנה, כי ניבי הוסיפה רק קוביות סגולות.
עדיין יש 60 קוביות צהובות, אבל עכשיו מתוך 240 קוביות סה"כ.

נחשב את האחוז: $\frac{60}{240} = \frac{1}{4} = 25\%$

תשובה (3).

שאלה 4 - גאומטריה - שטח משולש וממוצע

השאלה: ממוצע הגבהים של ארבעת המשולשים שבסרטוט הוא 5 ס"מ.
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט (כל בסיס הוא a ס"מ), מה סכום השטחים של ארבעת המשולשים?

פיתרון:

שלב 1: נזכר בנוסחת שטח משולש

$$\text{שטח משולש} = \frac{\text{בסיס} \times \text{גובה}}{2}$$

שלב 2: נמצא את סכום הגבהים
נתון שממוצע הגבהים של ארבעת המשולשים הוא 5 ס"מ.
ממוצע הוא סכום כל הערכים חלקי מספר הערכים, לכן:
סכום הגבהים = ממוצע × מספר המשולשים = 20 = 4 × 5 ס"מ.

שלב 3: נחשב את סכום השטחים

לכל ארבעת המשולשים אותו בסיס: a ס"מ.

נסמן את הגבהים: h_1, h_2, h_3, h_4

סכום השטחים הוא:

$$\frac{a \times h_1}{2} + \frac{a \times h_2}{2} + \frac{a \times h_3}{2} + \frac{a \times h_4}{2}$$

נוציא את הגורם המשותף $\frac{a}{2}$ מכל האיברים:

$$\frac{a}{2} \times (h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

מצאנו שסכום הגבהים הוא 20, לכן:

$$\frac{a}{2} \times 20 = 10a$$

תשובה (1).

שאלה 5 - גיאומטריה - מעוין ושטח

השאלה: בסרטוט שלפניכם ABCD הוא מעוין.

נתון: זווית B = 45°, צלע AB = $\sqrt{2}$ ס"מ.

מה גודל השטח הכהה (בסמ"ר)?

פיתרון:

שלב 1: זיהוי תכונות המעוין

במעוין כל הצלעות שוות, לכן כל צלע במעוין ABCD שווה ל-$\sqrt{2}$ ס"מ.

שלב 2: זיהוי המשולש הלבן

נסמן את הפינה השמאלית-תחתונה של המלבן הכהה ב-E. המשולש הלבן ABE הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים:

- זווית B = 45° (נתון)
- זווית E = 90° (זווית ישרה, מכיוון ש-E היא פינת המלבן)
- זווית A = 45° (כי סכום הזוויות במשולש הוא 180°)

שלב 3: מציאת אורך הניצבים

במשולש 90-45-45 (משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים), היחס בין הניצב ליתר הוא 1 : $\sqrt{2}$.

היתר הוא AB = $\sqrt{2}$, לכן כל ניצב שווה ל-1 ס"מ.

כלומר: BE = AE = 1 ס"מ.

שלב 4: חישוב השטח הכהה

המלבן הכהה הוא EFGH (כאשר F על צלע AD ו-G,H על צלע BC).

- צלע אחת של המלבן = BE = 1 ס"מ (הניצב של המשולש הלבן)
- צלע שניה של המלבן = צלע המעוין AD פחות הניצב AE = $\sqrt{2} - 1$ ס"מ

שטח מלבן = אורך × רוחב:

$1 \times (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2} - 1$ סמ"ר.

תשובה (4).

שאלה 6 - גאומטריה - סכום זוויות במצולע

השאלה: מה ההפרש בין סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל 21 צלעות ובין סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל 17 צלעות (במעלות)?

פיתרון:

שלב 1: ניזכר בנוסחה לסכום זוויות פנימיות במצולע

סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות הוא: $(n - 2) \times 180°$

עיקרון חשוב: כל צלע נוספת במצולע מוסיפה 180° לסכום הזוויות הפנימיות.
למשל: משולש (3 צלעות) = 180°, מרובע (4 צלעות) = 360°, מחומש (5 צלעות) = 540°, וכן הלאה.

שלב 2: חישוב ההפרש בדרך יעילה

במקום לחשב את סכום הזוויות בכל מצולע בנפרד, נשתמש בעיקרון שלמדנו.

ההפרש במספר הצלעות בין שני המצולעים הוא: $21 - 17 = 4$ צלעות.

כל צלע נוספת מוסיפה 180°, לכן ההפרש בסכום הזוויות הוא:
$4 \times 180° = 720°$

תשובה (3).

שאלה 7 - בעיית מילים - מחלקים

השאלה: 15 כדים ריקים ממוספרים מ-1 עד 15. רומי הניחה מטבע אחד בכל כד, אחר כך הניחה מטבע בכל כד שמספרו מתחלק ב-2, אחר כך בכל כד שמספרו מתחלק ב-3, וכן הלאה עד 15.
מספר המטבעות בכד 14 ____ בכד 2.

פיתרון:

שלב 1: הבנת התהליך

בהתחלה כל כד מקבל מטבע אחד.
אחר כך, כד מקבל מטבע נוסף בכל פעם שמספרו מתחלק במספר כלשהו (מ-2 עד 15).

שלב 2: מעקב אחרי התהליך

נעקוב אחרי מה שרומי עושה:
- בהתחלה - מניחה מטבע אחד בכל כד (1 עד 15).
- אחר כך עוברת על כל המספרים מ-2 עד 15, ובכל פעם מוסיפה מטבע לכדים שמספרם מתחלק באותו מספר.

למשל, כד מספר 6 יקבל מטבע נוסף כש:
- רומי מגיעה ל-2 (כי 6 מתחלק ב-2)
- רומי מגיעה ל-3 (כי 6 מתחלק ב-3)
- רומי מגיעה ל-6 (כי 6 מתחלק ב-6)

תובנה: כד מקבל מטבע נוסף עבור כל מחלק שלו (מ-2 ומעלה).
לכן: מספר המטבעות בכד = 1 (מההתחלה) + מספר המחלקים הטבעיים של מספר הכד (לא כולל 1).

שלב 3: חישוב מספר המטבעות בכד 2

המחלקים של 2 (מ-2 ומעלה): רק 2.
סה"כ מטבעות בכד 2: $1 + 1 = 2$ מטבעות.

שלב 4: חישוב מספר המטבעות בכד 14

המחלקים של 14 (מ-2 ומעלה): 2, 7, 14.
סה"כ מטבעות בכד 14: $1 + 3 = 4$ מטבעות.

שלב 5: השוואה

בכד 14 יש 4 מטבעות, בכד 2 יש 2 מטבעות.
$2 \times 2 = 4$, כלומר בכד 14 יש **פי שניים** מטבעות מאשר בכד 2.

תשובה (2).

הסקה מטבלה (שאלות 8-12)

שאלה 8 - טבלה - עבודות הדפסה

השאלה: באיזה מזוגות העבודות הבאים, העבודה שמידת דחיפותה גבוהה יותר החלה לפני האחרת?

פיתרון:

מה אנחנו מחפשים?

זוג עבודות שבו העבודה הדחופה יותר התחילה **לפני** העבודה הפחות דחופה.

בדיקת הזוגות:

תשובה (1): B ו-C

B: דחיפות נמוכה, התחלה 7:30

C: דחיפות בינונית, התחלה 8:00

C דחופה יותר, אבל C החלה אחרי B (7:30 < 8:00). ✗

תשובה (2): D ו-E

D: דחיפות בינונית, התחלה 8:05

E: דחיפות גבוהה, התחלה 10:10

E דחופה יותר, אבל E החלה אחרי D (8:05 < 10:10). ✗

תשובה (3): E ו-F

E: דחיפות גבוהה, התחלה 10:10

F: דחיפות נמוכה, התחלה 10:15

E דחופה יותר, ו-E אכן החלה לפני F (10:10 < 10:15). ✓

תשובה (4): G ו-H

G: דחיפות גבוהה, התחלה 12:15

H: דחיפות גבוהה מאוד, התחלה 14:00

H דחופה יותר, אבל H החלה אחרי G (12:15 < 14:00). ✗

תשובה (3).

שאלה 9 - הסקה מטבלה - זיהוי חפיפות זמנים

השאלה: באיזו מהשעות הבאות מספר העבודות שהיו בתהליכי הדפסה היה הגדול ביותר?

פיתרון:

לפי הנתון בשאלה, עבודה נחשבת "בתהליך הדפסה" כל עוד היא בין שעת ההתחלה לשעת הסיום שלה. נבדוק לגבי כל שעה מוצעת כמה עבודות כבר התחילו וטרם הסתיימו.

תשובה (1): בשעה 8:30

- עבודה A: התחילה ב-5:00, הסתיימה ב-7:00 — **הסתיימה**
- עבודה B: התחילה ב-7:30, מסתיימת ב-10:00 — **בתהליך** ✓
- עבודה C: התחילה ב-8:00, מסתיימת ב-8:50 — **בתהליך** ✓
- עבודה D: התחילה ב-8:05, מסתיימת ב-8:35 — **בתהליך** ✓
- עבודות E-H: טרם התחילו

סה"כ: 3 עבודות בתהליך

תשובה (2): בשעה 10:35

- עבודות A-D: הסתיימו
- עבודה E: התחילה ב-10:10, מסתיימת ב-10:40 — **בתהליך** ✓
- עבודה F: התחילה ב-10:15, מסתיימת ב-12:30 — **בתהליך** ✓
- עבודות G-H: טרם התחילו

סה"כ: 2 עבודות בתהליך

תשובה (3): בשעה 11:25

- עבודות A-E: הסתיימו
- עבודה F: התחילה ב-10:15, מסתיימת ב-12:30 — **בתהליך** ✓
- עבודות G-H: טרם התחילו

סה"כ: עבודה אחת בתהליך

תשובה (4): בשעה 12:20

- עבודות A-E: הסתיימו
- עבודה F: התחילה ב-10:15, מסתיימת ב-12:30 — **בתהליך** ✓
- עבודה G: התחילה ב-12:15, מסתיימת ב-12:45 — **בתהליך** ✓
- עבודה H: מתחילה ב-14:00 — **טרם התחילה**

סה"כ: 2 עבודות בתהליך

לסיכום: בשעה 8:30 היו 3 עבודות בתהליך (B, C, D) — המספר הגבוה ביותר מבין כל האפשרויות.

תשובה (1).

שאלה 10 - הסקה מטבלה - חישוב עותקים ודפים

השאלה: בחוברת שהודפסה בעבודה G יש 12 דפים בדיוק. מספר העותקים של החוברת שהודפסה בעבודה G שווה למספר העותקים של הספר שהודפס בעבודה A. כמה דפים יש בספר שהודפס בעבודה A?

פיתרון:

שלב 1: איסוף הנתונים מהטבלה
עבודה G (חוברת): סה"כ 6,000 דפים הודפסו
עבודה A (ספר): סה"כ 45,000 דפים הודפסו

שלב 2: חישוב מספר העותקים של חוברת G
נתון שבכל חוברת יש 12 דפים. מספר הדפים הכולל שהודפסו בעבודה G הוא 6,000.
לכן מספר העותקים של החוברת הוא: 12 ÷ 6,000 = 500 עותקים.

שלב 3: חישוב מספר הדפים בספר A
נתון שמספר העותקים של ספר A שווה למספר העותקים של חוברת G, כלומר 500 עותקים.
מספר הדפים הכולל שהודפסו בעבודה A הוא 45,000.
לכן מספר הדפים בכל ספר הוא: 500 ÷ 45,000 = 90 דפים.

תשובה (1).

שאלה 11 - הסקה מטבלה - זיהוי מידע חסר

השאלה: ידוע שלכל סוג פריט המודפס בבית הדפוס קצב הדפסה קבוע משלו (לא כולל ההפסקות). עבור איזה סוג פריט לא ניתן לדעת, על פי הטבלה, את קצב ההדפסה המדויק שלו?

פיתרון:

מה צריך כדי לחשב קצב הדפסה?
קצב הדפסה = מספר דפים ÷ זמן הדפסה נטו (ללא הפסקות).

הטבלה מספקת את מספר הדפים, שעת התחלה ושעת סיום, ואת **מספר** ההפסקות — אך לא את **משך** ההפסקות. לכן, אם היו הפסקות בעבודה מסוימת, לא ניתן לחשב את זמן ההדפסה נטו, ומכאן שלא ניתן לחשב את קצב ההדפסה המדויק.

כדי לדעת את קצב ההדפסה של סוג פריט מסוים, צריך לפחות עבודה אחת מאותו סוג **ללא הפסקות**.

בדיקת סוגי הפריטים:

ספר (עבודות A ו-H): לעבודה A יש 0 הפסקות - ניתן לחשב.
כתב עת (עבודות B ו-F): לעבודה B יש 0 הפסקות - ניתן לחשב.
כרזה (עבודות C ו-E): לעבודה E יש 0 הפסקות - ניתן לחשב.
חוברת (עבודות D ו-G): לעבודה D יש הפסקה אחת, ולעבודה G יש 2 הפסקות - **לשתיהן יש הפסקות, ולכן לא ניתן לחשב את קצב ההדפסה של חוברת.**

תשובה (4).

שאלה 12 - הסקה מטבלה - חישוב זמן כולל

השאלה: ב-_____ מהשעות המתוארות בטבלה נמצא כתב עת כלשהו בתהליכי הדפסה.

פיתרון:

זיהוי עבודות כתב עת בטבלה:
עבודה B: מ-7:30 עד 10:30
עבודה F: מ-10:15 עד 12:30

חישוב משך כל עבודה:
עבודה B: מ-7:30 עד 10:30 = 3 שעות
עבודה F: מ-10:15 עד 12:30 = שעתיים ורבע (2.25 שעות)

חישוב הזמן הכולל:
עבודה B מתחילה ב-7:30 ועבודה F מסתיימת ב-12:30. מכיוון ש-F מתחילה (ב-10:15) לפני ש-B מסתיימת (ב-10:30), אין פער ביניהן - כלומר, מ-7:30 ועד 12:30 היה כתב עת כלשהו בתהליך הדפסה ברציפות.

נשים לב: העובדה שבין 10:15 ל-10:30 היו שני כתבי עת בהדפסה בו-זמנית לא מוסיפה לזמן - השאלה שואלת במשך כמה זמן היה כתב עת **כלשהו** בהדפסה.

מ-7:30 עד 12:30 = 5 שעות.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - אלגברה - פעולות מוגדרות, חזקות

השאלה: לכל מספר חיובי x הוגדרה הפעולה $\$(x) = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$.
מהו $\$(\$(\sqrt{2}))$?

פיתרון:

ראשית נזכיר את הזהות לחזקה שלילית: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

לכן הפעולה:
$$2 \cdot x^{-2} = 2 \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

שלב 1: חישוב $(\sqrt{2})$\$
נציב $x = \sqrt{2}$ בנוסחה ונקבל:
$$\frac{2}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2}{2} = 1$$

שלב 2: חישוב (1)\$
קיבלנו $(\sqrt{2}) = 1$\$, ולכן עלינו לחשב (1)\$:
$$\frac{2}{1^2} = \frac{2}{1} = 2$$

תשובה (2).

שאלה 14 - גיאומטריה - קובייה, זוויות

השאלה: ABCDEFGH היא קובייה. מהי הזווית $\sphericalangle ABG$?

פתרון:

הזווית $\sphericalangle ABG$ נמצאת בתוך מרחב הקובייה. כדי לעבוד איתה, נבנה קו עזר מ-A ל-G ונקבל משולש ABG שמכיל את הזווית.

שלב 1: זיהוי הקטעים שיוצרים את הזווית
הזווית ABG נוצרת על ידי שני קטעים:
- הקטע AB: זוהי צלע של הקובייה.
- הקטע BG: זהו אלכסון של הפאה BFGC - הקו שמחבר בין B ל-G חוצה את הריבוע הזה באלכסון.

שלב 2: בחינת היחס בין AB לבין הפאה BFGC
הפאה BFGC היא אחת מפאות הקובייה.

בקובייה, כל הפאות ניצבות זו לזו. המשמעות היא שכל צלע שיוצאת מפינה של פאה מסוימת - יוצאת ממנה בזווית של 90°. לכן AB מאונכת לפאה BFGC כולה.

שלב 3: הפעלת עיקרון מגיאומטריה מרחבית
קיים עיקרון חשוב: אם ישר מאונך למישור שלם, אז הוא מאונך גם לכל ישר שמשורטט על פני אותו מישור.

נפעיל את העיקרון על המקרה שלנו:
- הוכחנו שהצלע AB מאונכת לפאה BFGC.
- האלכסון BG נמצא על הפאה BFGC (הוא חלק ממנה).
- לכן, לפי העיקרון, AB מאונכת גם ל-BG.

שלב 4: מסקנה
אם AB מאונכת ל-BG, הזווית שביניהם היא בהכרח 90°.

לכן $\sphericalangle ABG = 90^\circ$.

טיפ לפתרון:
בשאלות גיאומטריה מרחבית, כשמבקשים למצוא זווית או אורך, כדאי לשאול: באיזו צורה דו-ממדית (משולש, מרובע) נמצא הגודל הזה? לעיתים צריך להוסיף קווי עזר כדי ליצור את הצורה.

התשובה: $\sphericalangle ABG = 90^\circ$ - **תשובה (3).**

שאלה 15 - אלגברה - ממוצע

השאלה: a ו-b הם שני מספרים כלשהם. איזה מהביטויים הבאים **אינו** בהכרח שווה לממוצע של a ו-b?

פתרון:

נקודת המוצא: הממוצע של a ו-b הוא $\frac{a+b}{2}$

תובנת מפתח: ממוצע הוא סכום חלקי כמות האיברים. בכל התשובות מופיעים הביטויים a ו-b בצורות שונות. צריך לבדוק בכל תשובה: מה הסכום במונה, ובכמה איברים מחלקים אותו. אם התוצאה שונה מהממוצע של a ו-b - זו התשובה.

נבדוק כל תשובה:

תשובה (1): הממוצע של (a + 1) ו-(b - 1)

נחשב: סוכמים את שני המספרים ומחלקים ב-2:

$\frac{(a+1)+(b-1)}{2} = \frac{a+b}{2}$

ה-1 וה-1- מתקזזים, ונקבל בדיוק את הממוצע. ✓ **שווה לממוצע**

תשובה (2): חצי מהממוצע של 2a ו-2b

הממוצע של 2a ו-2b הוא: $\frac{2a+2b}{2} = a + b$

חצי מזה: $\frac{1}{2} \cdot (a + b) = \frac{a+b}{2}$

✓ **שווה לממוצע**

תשובה (3): הממוצע של a, b ו-(a + b)

נחשב: סוכמים שלושה מספרים ומחלקים ב-3:

$\frac{a+b+(a+b)}{3} = \frac{2(a+b)}{3}$

זה שונה מהממוצע כי אנחנו מחלקים ב-3 במקום ב-2.

✗ **לא שווה לממוצע!**

תשובה (4): הממוצע של a), (-b), 3a- ו-3b

נחשב: סוכמים ארבעה מספרים ומחלקים ב-4:

$\frac{(-a)+(-b)+3a+3b}{4} = \frac{2a+2b}{4} = \frac{a+b}{2}$

המספרים מתקזזים חלקית: 3a + (-a) = 2a, וכן 3b + (-b) = 2b.

✓ **שווה לממוצע**

התשובה: (3) - הממוצע של a, b ו-(a + b) אינו שווה לממוצע של a ו-b.

שאלה 16 - הסתברות

השאלה: אלונה ושירה משחקות משחק. בכל סיבוב כל אחת מהן מטילה קובייה. אם המספרים שהתקבלו שונים זה מזה, הן משחקות סיבוב נוסף. אחרת, המשחק נגמר. מה ההסתברות שהמשחק יגמר אחרי שני סיבובים בדיוק?

פיתרון:

מה צריך לקרות כדי שהמשחק יגמר בדיוק אחרי 2 סיבובים?

- **סיבוב ראשון:** התוצאות צריכות להיות שונות (אחרת המשחק נגמר כבר בסיבוב הראשון)
- **סיבוב שני:** התוצאות צריכות להיות שוות (כדי שהמשחק יגמר)

שלב 1: מה ההסתברות שהתוצאות שונות בסיבוב הראשון?

סה"כ יש 36 אפשרויות (6 אפשרויות לקובייה ראשונה כפול 6 לשנייה).

יש 6 אפשרויות שבהן שתי הקוביות מראות את אותו המספר: (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6).

לכן יש 30 אפשרויות לתוצאות שונות.

ההסתברות לתוצאות שונות היא 30 מתוך 36, כלומר $\frac{5}{6}$.

שלב 2: מה ההסתברות שהתוצאות שוות בסיבוב השני?

ההסתברות לתוצאות שוות היא 6 מתוך 36, כלומר $\frac{1}{6}$.

שלב 3: חישוב ההסתברות הסופית

מכיוון שהסיבובים בלתי תלויים, נכפיל את ההסתברויות:

ההסתברות לסיום בדיוק אחרי 2 סיבובים = (הסתברות לתוצאות שונות בסיבוב הראשון) × (הסתברות לתוצאות שוות בסיבוב השני)

$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$

תשובה (2).

שאלה 17 - אלגברה - מערכת משוואות

השאלה: נתונות שתי משוואות עם שני נעלמים x ו-y. צריך למצוא את x.

משוואה 1: $4x - 2xy + 3y = 74$
משוואה 2: $\frac{x}{2} + \frac{xy}{3} - \frac{y}{2} = -\frac{2}{3}$

פיתרון:

המטרה: למצוא את x, כלומר להיפטר מ-y.

הבעיה: המכנים במשוואה השנייה מפריעים לנו לראות מה ניתן לעשות. נפשט אותה תחילה.

שלב 1: פישוט המשוואה השנייה
נכפיל את כל המשוואה השנייה ב-6 כדי להיפטר מהמכנים:

כל איבר נכפל ב-6, והמכנים מצטמצמים:
- $6 \cdot \frac{x}{2} = 3x$
- $6 \cdot \frac{xy}{3} = 2xy$
- $6 \cdot \frac{y}{2} = 3y$
- $6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -4$

אחרי הכפלה נקבל: $3x + 2xy - 3y = -4$

שלב 2: הצגת שתי המשוואות ובחירת פעולה
כעת נציג את שתי המשוואות זו מעל זו:

משוואה 1: 4x − 2xy + 3y = 74
משוואה 2: 3x + 2xy − 3y = −4

נשים לב: אם נחבר את המשוואות, האיברים **2xy−** ו-**2xy+** יתבטלו, וגם **3y+** ו-**3y−** יתבטלו!

שלב 3: חיבור המשוואות
נחבר את שתי המשוואות:

74 + (−4) = (3x + 2xy − 3y) + (4x − 2xy + 3y)

אחרי הקיזוז נישאר עם:
$7x = 70$

נחלק ב-7:
$x = 10$

תשובה (2).

שאלה 18 - אלגברה - התחלקות

השאלה:
x ו-y הם מספרים שלמים וחיוביים המתחלקים ב-3.
מה המספר הגדול ביותר שהסכום (x+y) מתחלק בו בוודאות?

הצבה ראשונה: x = 3, y = 3
סכום: 3 + 3 = 6

נבדוק אילו תשובות נפסלות:
(1) 6: האם 6 מתחלק ב-6? כן ✓
(2) 12: האם 6 מתחלק ב-12? לא ✗ נפסל
(3) 3: האם 6 מתחלק ב-3? כן ✓
(4) 9: האם 6 מתחלק ב-9? לא ✗ נפסל

נשארו: תשובות (1) ו-(3)

הצבה שנייה: x = 3, y = 6

סכום: 3 + 6 = 9

נבדוק את התשובות שנשארו:
(1) 6: האם 9 מתחלק ב-6? לא ✗ נפסל
(3) 3: האם 9 מתחלק ב-3? כן ✓

נשארה רק תשובה (3)

התשובה: (3)

דרך נוספת: הוכחה אלגברית

מכיוון ש-x ו-y מתחלקים ב-3, אפשר לכתוב:

$x = 3a$ (כאשר a מספר שלם וחיובי)
$y = 3b$ (כאשר b מספר שלם וחיובי)

לכן:
$$x + y = 3a + 3b = 3(a + b)$$

מכיוון ש-a ו-b יכולים להיות כל מספר טבעי, גם הסכום (a+b) יכול להיות כל מספר טבעי, מאחר שהסכום x+y יכול להיות כל כפולה של 3 (כלומר: 3, 6, 9, 12, ...). מכאן שלכל תשובה מלבד 3 ניתן למצוא דוגמה נגדית, ורק 3 מחלק את הסכום **בוודאות**.

שאלה 19 - אלגברה - מעגלים

השאלה:
כמה מעגלים שונים זה מזה שהיקפם (בס"מ) הוא מספר שלם וחיובי וגם שטחם (בסמ"ר) הוא מספר שלם וחיובי קיימים?

פתרון:

נקודת המוצא:
היקף מעגל: $2\pi r$
שטח מעגל: πr^2

בדיקת ההיקף
כדי שההיקף יהיה מספר שלם, צריך "לבטל" את ה-π.
לכן הרדיוס צריך להיות מהצורה $\frac{n}{\pi}$ (כאשר n מספר שלם).

נציב בנוסחת ההיקף:
$$2\pi \cdot \frac{n}{\pi} = 2n$$
ה-π מתקזז ונקבל מספר שלם. ✓

בדיקת השטח
נציב את אותו רדיוס בנוסחת השטח:
$$\pi \cdot \left(\frac{n}{\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{n^2}{\pi^2} = \frac{n^2}{\pi}$$

ה-π **לא מתקזז** כי יש לנו π^2 במכנה אבל רק π אחד במונה.
לכן השטח לא יהיה מספר שלם. ✗

מסקנה

אין רדיוס שיגרום גם להיקף וגם לשטח להיות מספרים שלמים בו-זמנית.

התשובה: (4)

שאלה 20 - אלגברה - בעיות תנועה

השאלה:

יצחק נוסע במהירות קבועה של 70 קמ"ש. רות נוסעת במהירות קבועה של 105 קמ"ש.
רות נוסעת y ק"מ בשליש מהזמן שיצחק נוסע בו x ק"מ.
איזו מהטענות הבאות נכונה?

פתרון:

דרך א': הצבת מספרים

נציב מספרים נוחים: נניח שרות נוסעת $y = 105$ ק"מ.
בזמן כמה היא עוברת מרחק זה? במהירות 105 קמ"ש, היא עוברת 105 ק"מ בשעה אחת.

לפי הנתון, זמן רות = שליש מזמן יצחק.
אם רות נסעה שעה, אז יצחק נסע 3 שעות.

כמה עבר יצחק ב-3 שעות במהירות 70 קמ"ש?
$x = 70 \cdot 3 = 210$ ק"מ

קיבלנו: $x = 210$, $y = 105$
נבדוק את התשובות:
(1) $2y = x$: האם $2 \cdot 105 = 210$? כן! ✓
(2) $y = 2x$: האם $105 = 2 \cdot 210$? לא ✗
(3) $3y = x$: האם $3 \cdot 105 = 210$? לא ✗
(4) $y = 3x$: האם $105 = 3 \cdot 210$? לא ✗

דרך ב': יחס מהירויות וזמנים

מהירות רות גדולה פי $\frac{105}{70} = \frac{3}{2}$ ממהירות יצחק.

אם שניהם היו נוסעים **אותו זמן**, רות היתה עוברת דרך גדולה פי $\frac{3}{2}$ מיצחק.

אבל רות נוסעת רק **שליש** מהזמן של יצחק.

לכן הדרך של רות ביחס לדרך של יצחק:
$\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

כלומר: $y = \frac{x}{2}$, או: $2y = x$

התשובה: (1)