<u>חורף 2019 – שאלון 035182</u>

<u>אלגברה</u>

1. המחיר של שולחן אחד ו-4 כיסאות הוא 1,500 שקלים.

המחיר של שני שולחנות ו-6 כיסאות הוא 2,500 שקלים.

(המחיר לשולחן הוא קבוע והמחיר לכיסא הוא קבוע).

א. חשב את המחיר של שולחן ואת המחיר של כיסא.

ב. מה יהיה המחיר של 4 כיסאות אם המחיר של כיסא יעלה ב-20%?

פתרון:

א. נשתמש בנעלמים x ו-y על מנת להביע מחיריהם של השולחן והכיסא בהתאמה:

x = מחיר שולחן אחד

y = מחיר כיסא אחד

כעת נשתמש בנעלמים x ו-y על מנת לבטא את הנתונים בשאלה:

המחיר של שולחן אחד ו- 4 כיסאות הוא 1,500 שקלים –

1,500 שקלים = מחיר 4 כיסאות + מחיר שולחן אחד

$$x + 4y = 1{,}500$$

המחיר של שני שולחנות ו- 6 כיסאות הוא 2,500 שקלים –

2,500 שקלים = מחיר 6 כיסאות + מחיר 2 שולחנות

$$2x + 6y = 2{,}500$$

נבחן את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + 4y = 1{,}500 \\ 2x + 6y = 2{,}500 \end{cases}$$

נכפול את המשוואה הראשונה על מנת להשוות מקדמים, ונחסר בין המשוואות:

$$-\begin{cases} x+4y=1{,}500 & /\cdot 2 \\ 2x+6y=2{,}500 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$-\begin{cases} 2x+8y=3{,}000 \\ 2x+6y=2{,}500 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$-\begin{cases} 2x+8y=3{,}000 \\ 2x+6y=2{,}500 \end{cases}$$

נקבל את המשוואה הבאה:

$$2x+8y-(2x+6y)=3{,}000-2{,}500$$

$$2x+8y-2x-6y=500$$

$$2y=500 \quad /\div 2$$

$$y=250$$

מצאנו אם כן שמחיר כיסא אחד הוא 250 שקלים.

נציב זאת באחת המשוואות כדי למצוא את מחירו של השולחן:

$$x+4y=1{,}500$$

$$x+4\cdot 250=1{,}500$$

$$x+1{,}000=1{,}500 \quad /-1{,}000$$

$$x=500$$

מצאנו שמחיר שולחן אחד הוא 500 שקלים.

תשובה:

מחירו של שולחן הוא 500 שקלים ומחירו של כיסא הוא 250 שקלים

ב. בסעיף הקודם מצאנו שמחירו של כיסא הוא 250 שקלים. נשתמש בנוסחה להעלאה באחוזים בכדי למצוא את מחירו לאחר התייקרות ב-20%:

$$\text{מחיר הכסא החדש} = \left(\frac{100+20}{100}\right)\cdot \text{מחיר הכסא המקורי}$$

$$\text{מחיר הכסא החדש} = \left(\frac{120}{100}\right)\cdot 250$$

$$\text{מחיר הכסא החדש} = 300$$

נחשב את מחירם של 4 כיסאות:

$$\text{מחיר 4 כסאות} = 4\cdot 300 = 1{,}200$$

תשובה:

מחירם של 4 כיסאות לאחר ההתייקרות יהיה 1,200 שקלים

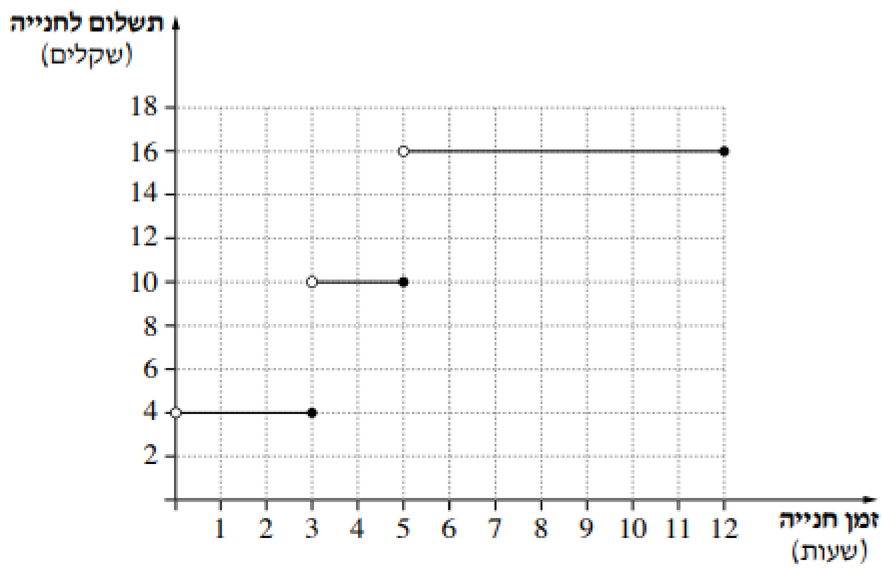
2. מר כהן נוסע במכונית פרטית מביתו למרכז העיר, ושם הוא מחנה את המכונית באחד משני

חניונים: חניון I או חניון II.

בחניון I: התשלום הוא 14 שקלים ליום, ואינו תלוי במספר שעות החנייה.

בחניון II: התשלום תלוי במספר שעות החנייה. הקשר בין מספר שעות החנייה ובין התשלום

לחנייה מוצג בגרף שלפניך.



א. ביום א' החנה מר כהן את מכוניתו בחניון II בשעה 8:00 בבוקר, והוציא אותה מן החניון בשעה 12:00

בצוהריים. כמה שילם מר כהן באותו יום בעבור החנייה?

ב. ביום ב' ידע מר כהן כי יישאר במרכז העיר 7 שעות ובחר בחניון שבו התשלום בעבור 7 שעות נמוך יותר.

כמה שילם מר כהן בעבור החנייה הזאת?

ג. מהו מספר השעות הגדול ביותר שיוכל מר כהן להחנות את מכוניתו, אם בכיסו 8 שקלים בלבד?

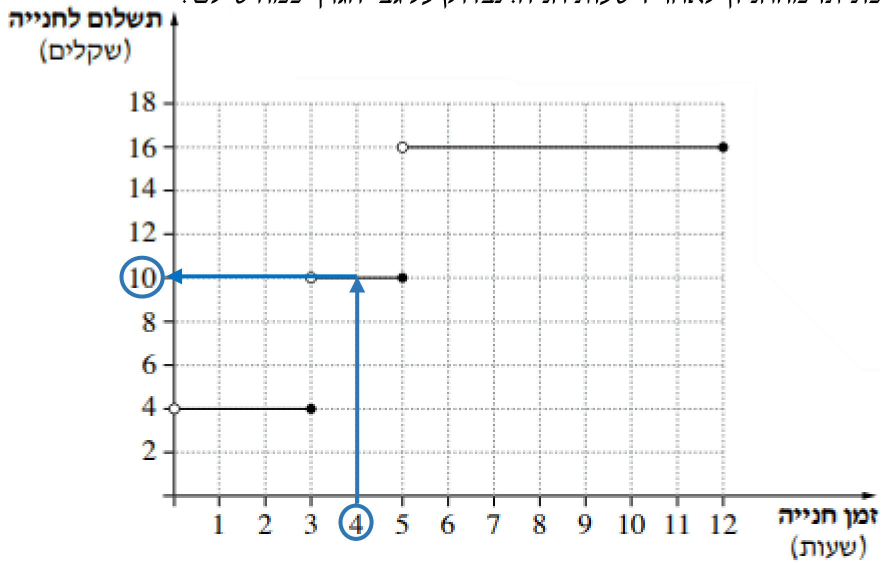
ד. ביום ג' החליט מר כהן להחנות את מכוניתו בחניון II, משום שבחניון הזה יהיה התשלום בעבור החנייה נמוך

יותר. כמה שעות לכל היותר הוא מתכוון לחנות בחניון זה?

(פתרון בעמוד הבא ←)

פתרון:

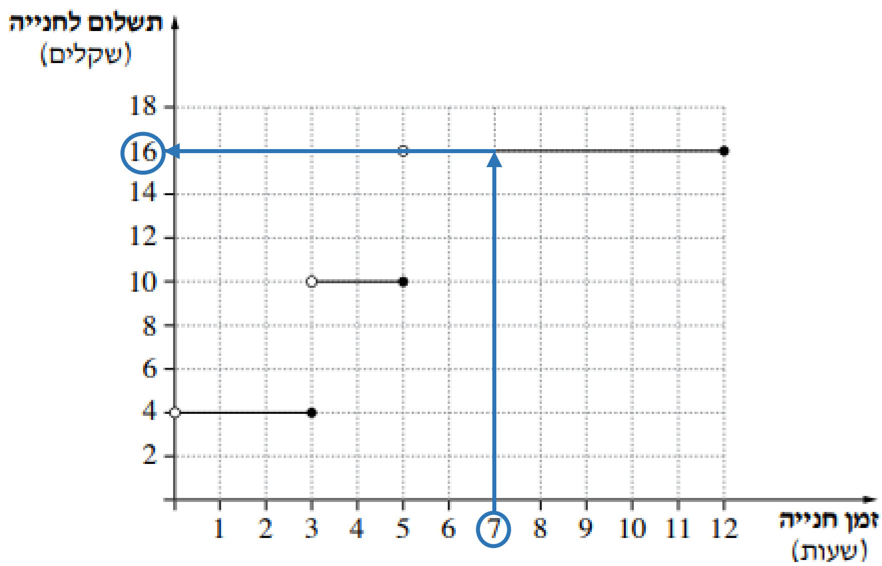
א. מר כהן הוציא את מכוניתו מהחניון לאחר 4 שעות חניה. נבדוק על גבי הגרף כמה שילם:



תשובה:

על פי הגרף מר כהן שילם בעבור 4 שעות של חניה 10 שקלים

ב. בחניון I מחיר החניה הוא 14 שקלים ואינו תלוי במספר שעות החניה. נבדוק על גבי הגרף מה מחיר חניה במשך 7 שעות בחניון II:

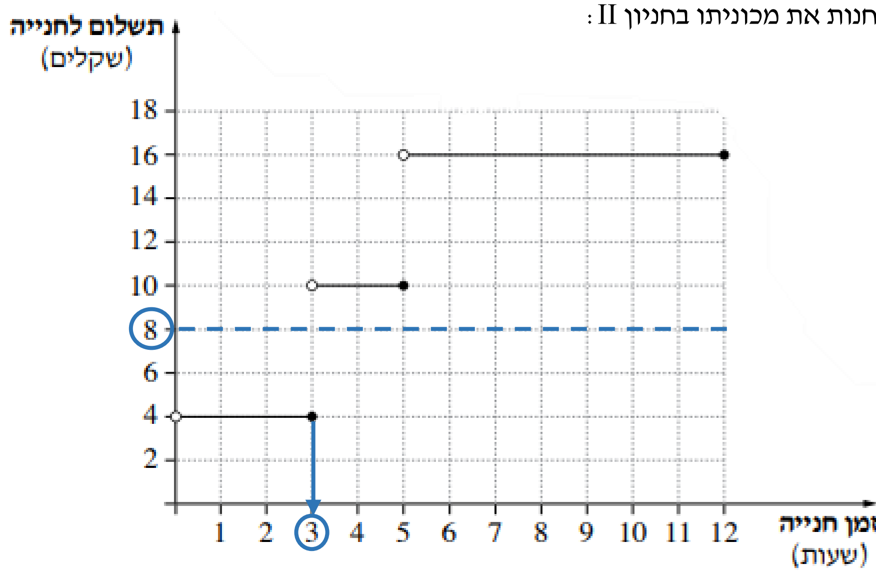


בחניון II מחיר החניה הוא 16 שקלים. ידוע שמר כהן בחר באפשרות הזולה יותר, שהיא החניה בחניון I.

תשובה:

על פי הגרף, מר כהן שילם 14 שקלים בעבור החניה

ג. אם למר כהן יש 8 שקלים, הוא אינו יכול להרשות לעצמו לחנות בחניון I. נבדוק על גבי הגרף מהו פרק הזמן הארוך ביותר בו יכל מר כהן להחנות את מכוניתו בחניון II :

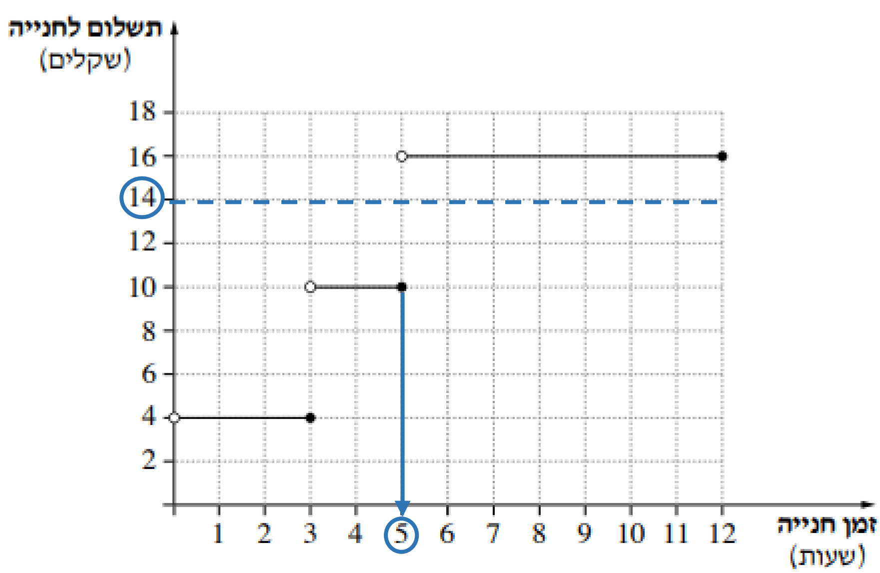


נוכל לראות שמר כהן לא יכול היה להשאיר את רכבו בחניון II מעבר ל-3 שעות.

תשובה :

על פי הגרף, מר כהן יוכל להחנות את מכוניתו לכל היותר 3 שעות

ד. נבדוק מהו משך הזמן הארוך ביותר שניתן לחנות בחניון II במחיר נמוך מ-14 שקלים, מחיר החניה בחניון I :



תשובה :

על פי הגרף, מר כהן מתכוון להחנות את מכוניתו לכל היותר 5 שעות

3. המשכורת של פועל בחודש הראשון לעבודתו הייתה 5,000 שקלים.

בכל חודש לאחר מכן, הייתה המשכורת שלו גבוהה ב-53 שקלים מן המשכורת שקיבל בחודש הקודם.

א. מה הייתה המשכורת של הפועל בחודש ה-12 לעבודתו? פרט את חישוביך.

ב. כמה השתכר הפועל ב-12 החודשים הראשונים לעבודתו סך הכול? פרט את חישוביך.

פתרון:

מדובר בסדרה חשבונית:

- ***המשכורת של פועל בחודש הראשון לעבודתו הייתה 5,000 שקלים*** ← $a_1 = 5{,}000$
- ***בכל חודש לאחר מכן...המשכורת שלו גבוהה ב-53 שקלים מן המשכורת שקיבל בחודש הקודם*** ← $d = 53$

א. כדי למצוא את המשכורת בחודש ה-12 לעבודתו, נחפש את האיבר ה-a_{12} בעזרת נוסחת האיבר הכללי:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$n = 12$$
$$a_{12} = 5{,}000 + (12-1)\cdot 53$$
$$a_{12} = 5{,}000 + 11\cdot 53$$
$$a_{12} = 5{,}000 + 583$$
$$a_{12} = 5{,}583$$

תשובה:

משכורתו של הפועל בחודש ה-12 לעבודתו הייתה 5,583 שקלים

ב. כדי למצוא כמה השתכר הפועל ב-12 החודשים הראשונים לעבודתו, נחשב את סכום 12 האיברים הראשונים בסדרה, בעזרת הנוסחה לסכום של סדרה חשבונית:

$$S_n = \frac{n[2a_1 + d(n-1)]}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot [2 \cdot 5{,}000 + 53 \cdot (12-1)]}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot [10{,}000 + 53 \cdot 11]}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot [10{,}000 + 583]}{2}$$

$$S_{12} = \frac{12 \cdot 10{,}583}{2}$$

$$S_{12} = \frac{126{,}996}{2}$$

$$S_{12} = 63{,}498$$

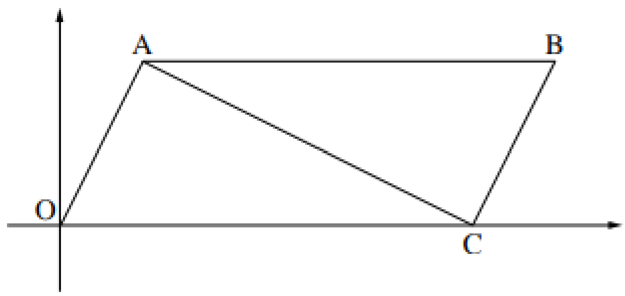
תשובה:

ב-12 החודשים הראשונים לעבודתו הפועל השתכר בסך הכל 63,498 שקלים

4. בציור שלפניך מתואר מרובע OABC ‏(O – ראשית הצירים).

הנקודה C נמצאת על ציר ה-x.

נתון: משוואת הישר AC היא $y = -\frac{1}{2}x + 5$.



א. מצא את שיעורי הנקודה C.

נתון: משוואת הישר OA היא $y = 2x$.

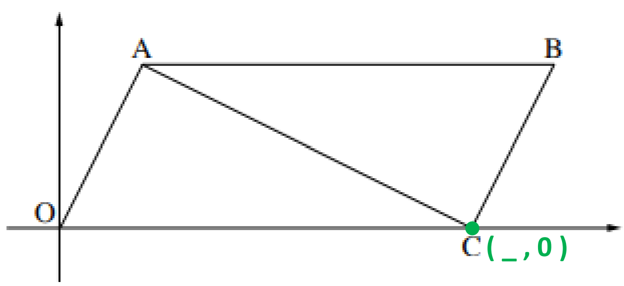
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

נתון: הישר BC מקביל לישר OA.

ג. מצא את משוואת הישר BC.

פתרון:

א. נתבונן בנקודה C:



- הנקודה נמצאת על גבי ציר ה-x ולכן שיעור ה-y שלה הוא 0
- הנקודה נמצאת על גבי הישר AC, שמשוואתו נתונה לנו

נציב $y = 0$ במשוואת הישר AC ונמצא את שיעור ה-x של הנקודה C:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

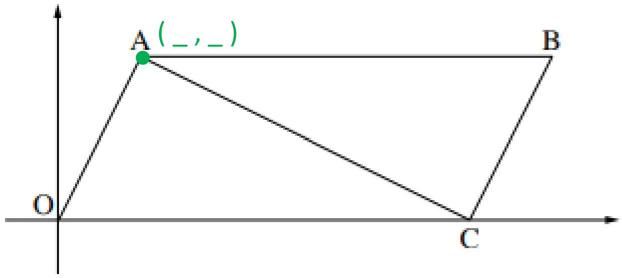
$$0 = -\frac{1}{2}x + 5 \quad / + \frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{2}x = 5 \quad / \cdot 2$$

$$x = 10$$

תשובה:

שיעורי הנקודה C: (10 , 0)



ב. נתבונן בנקודה A:

- הנקודה נמצאת על גבי הישר AC שמשוואתו נתונה לנו
- הנקודה נמצאת על גבי הישר OA שמשוואתו נתונה לנו

הנקודה A היא נקודת החיתוך בין הישרים AC ו-OA ולכן נשווה בין משוואותיהם כדי למצוא את שיעוריה:

$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

$$y = 2x$$

$$-\frac{1}{2}x + 5 = 2x \quad /+\frac{1}{2}x$$

$$5 = 2\frac{1}{2}x \quad /\div 2\frac{1}{2}$$

$$x = 2$$

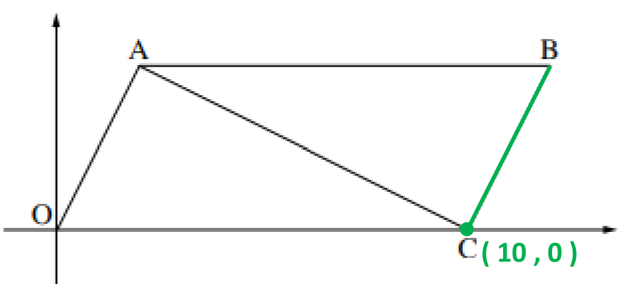
מצאנו ששיעור ה-x של הנקודה A הוא 2, נציב זאת באחת מהמשוואות על מנת למצוא את שיעור ה-y:

$$y = 2 \cdot 2$$

$$y = 4$$

תשובה:

שיעורי הנקודה A: (2 , 4)



ג. נתבונן בישר BC:

- הנקודה C(10 , 0) נמצאת על גבי הישר BC
- נתון שהישרים BC ו-OA מקבילים, כלומר לשניהם אותו השיפוע:

$$m_{BC} = m_{OA} = 2$$

נשתמש בשיפוע ובנקודה C כדי למצוא את משוואת הישר BC:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

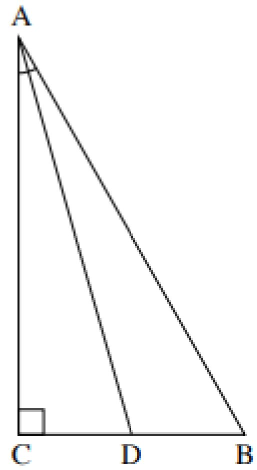
$$y - 0 = 2 \cdot (x - 10)$$

$$y = 2x - 20$$

תשובה:

משוואת הישר BC היא $y = 2x - 20$

<u>טריגונומטריה</u>



5. במשולש ישר זווית ACB ‏($\sphericalangle ACB = 90°$)

אורכי הניצבים הם: AC = 7

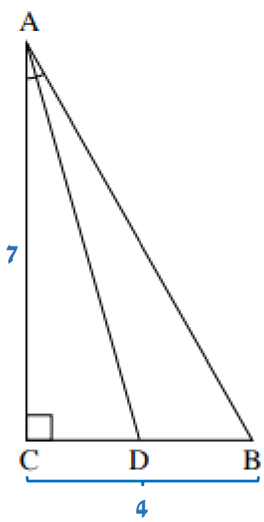
CB = 4

D היא נקודה על הניצב CB, כך ש-AD חוצה את הזווית CAB

(ראה ציור).

א. חשב את גודל הזווית CAB.

ב. חשב את האורך של AD.



פתרון:

א. נרשום על גבי המשולש את הנתונים:
נתונים לנו אורכי שני הניצבים במשולש ישר זווית, ולכן נשתמש בנוסחת הטנגנס כדי למצוא את הזווית $\sphericalangle CAB$:

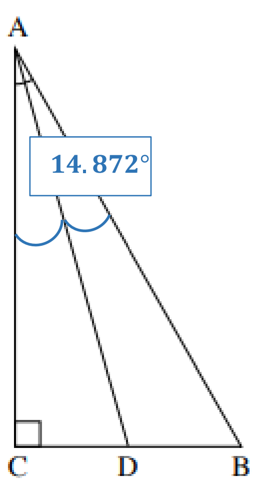
$$\tan \sphericalangle CAB = \frac{CB}{AC} = \frac{4}{7}$$

$$\tan \sphericalangle CAB = \frac{4}{7}$$

$$\sphericalangle CAB = 29.745°$$

תשובה:

$$\boxed{\sphericalangle CAB = 29.745°}$$



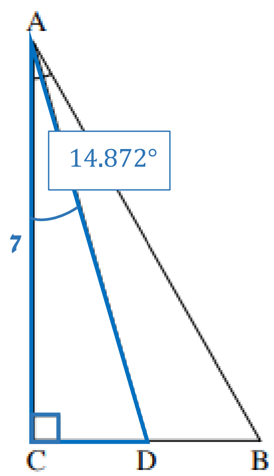
ב. נתון שהישר AD חוצה את הזווית $\sphericalangle CAB$, אותה חישבנו בסעיף א':

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle DAB = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$$

$$\sphericalangle CAD = \frac{29.745}{2} = 14.872°$$

כעת נתבונן במשולש CAD -

נתונים לנו אורך אחד הניצבים וגודלה של אחת הזוויות במשולש ישר זווית, ולכן נשתמש בנוסחת הקוסינוס כדי למצוא את הצלע AD :



$$\cos 14.872° = \frac{7}{AD} \qquad /\cdot AD$$

$$AD \cdot \cos 14.872° = 7 \qquad /\div \cos 14.872°$$

$$AD = \frac{7}{\cos 14.872°}$$

$$AD = \frac{7}{\cos 14.872°}$$

$$AD = 7.243$$

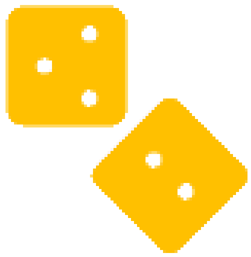
תשובה :

אורך הצלע AD הוא 7.243 ס"מ

<u>הסתברות וסטטיסטיקה</u>

6. על כל אחת מן הפאות של קובייה מאוזנת רשום מספר. על שלוש מן הפאות רשום המספר 1, על שתיים מן הפאות רשום המספר 2 ועל הפאה הנותרת רשום המספר 3.

מטילים את הקובייה פעם אחת.



א. מהי ההסתברות שיתקבל המספר 2?

ב. מהי ההסתברות שיתקבל מספר הקטן מ-3?

ג. מהי ההסתברות שיתקבל מספר **אי-זוגי**?

פתרון:

נתונה קובייה מאוזנת ולה 6 פאות:

- על 3 פאות – רשום המספר 1
- על 2 פאות – רשום המספר 2
- על פאה אחת – רשום המספר 3

א. ההסתברות לקבל את המספר 2 בהטלת הקובייה שווה למספר הפאות עליהן רשום המספר 2, מתוך כלל הפאות האפשריות:

$$P(\text{לקבל בהטלה } 2) = \frac{\text{מספר הפאות שרשום עליהן } 2}{\text{מספר הפאות הכולל}}$$

$$P(\text{לקבל בהטלה } 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

תשובה:

ההסתברות לקבל בהטלת הקובייה את המספר 2 היא $\frac{1}{3}$

ב. ההסתברות לקבל מספר הקטן מ-3 בהטלת הקובייה שווה למספר הפאות עליהן רשום מספר קטן מ-3, מתוך כלל הפאות האפשריות. במילים אחרות, מספר הפאות עליהן רשומים המספרים 1 או 2, מתוך מספר הפאות שהוא 6:

$$P(\text{לקבל מספר קטן מ-3}) = \frac{\text{מספר הפאות שרשום עליהן 2} + \text{מספר הפאות שרשום עליהן 1}}{\text{מספר הפאות הכולל}}$$

$$P(\text{לקבל מספר קטן מ-3}) = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

תשובה:

ההסתברות לקבל בהטלת הקובייה מספר הקטן מ-3 היא $\frac{5}{6}$

ג. ההסתברות לקבל מספר אי-זוגי בהטלת הקובייה שווה למספר הפאות עליהן רשום מספר אי-זוגי, מתוך כלל הפאות האפשריות. במילים אחרות, מבפר הפאות עליהן רשומים המספרים 1 או 3, מתוך מספר הפאות שהוא 6:

$$P(\text{לקבל מספר אי-זוגי}) = \frac{\text{מספר הפאות שרשום עליהן 3} + \text{מספר הפאות שרשום עליהן 1}}{\text{מספר הפאות הכולל}} = \frac{3+1}{6}$$

$$P(\text{לקבל מספר אי-זוגי}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

תשובה:

ההסתברות לקבל בהטלת הקובייה מספר אי-זוגי היא $\frac{2}{3}$