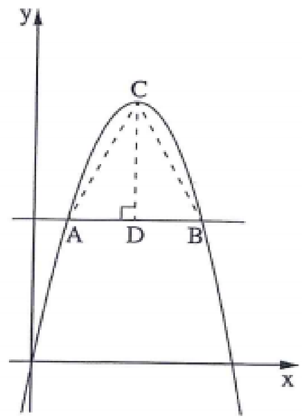
<u>קיץ ב 2018 – שאלון 035381</u>

<u>אלגברה</u>



.1 בציור שלפניך מתוארת הפרבולה שמשוואתה היא $y = -x^2 + 6x$
והישר שמשוואתו היא $y = 5$

א. מצא את שיעורי קודקוד הפרבולה, C.

הנקודות A ו B הן נקודות החיתוך של הפרבולה והישר, כמתואר בציור.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

CD הוא גובה במשולש ABC (ראה ציור).

ג. **(1)** מהו אורך הגובה?

(2) חשב את שטח המשולש ABC.

פתרון:

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את קודקוד הפרבולה C.

לפי הנתונים, נוסחת הפרבולה:

$$y = -x^2 + 6x$$

a = -1   b = 6   c = 0

נוסחת הקודקוד של הפרבולה:

$$x_{\text{קודקוד}} = \frac{-b}{2a}$$

נציב בהתאמה:

$$x_{\text{קודקוד}} = \frac{-(6)}{2 \cdot (-1)} = 3$$

כעת, עלינו למצוא את שיעור ה-y של הנקודה ולכן נציב את שיעור ה-x שמצאנו במשוואת הפרבולה:

$$y = -(3)^2 + 6 \cdot 3 = 9$$

תשובה:

שיעור הקודקוד C הוא (3 , 9).

ב. כדי למצוא את נקודת החיתוך של הפרבולה עם הישר עלינו להשוות בין משוואת הישר למשוואת הפרבולה :

$$y = -x^2 + 6x \qquad y = 5$$

$$-x^2 + 6x = 5$$

נעביר אגפים ונסדר :

$$-x^2 + 6x - 5 = 0$$

$a = -1 \qquad b = 6 \qquad c = -5$

נציב בנוסחת השורשים :

$$x_{1,2} = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-5)}}{2 \cdot (-1)}$$

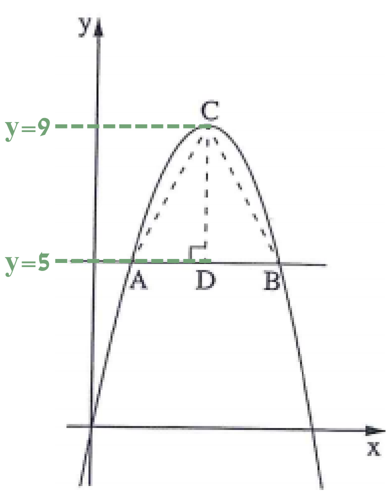
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 20}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{-6 + 4}{-2} = 1 \qquad x_2 = \frac{-6 - 4}{-2} = 5$$

נתון שהישר הוא $y = 5$ ומכאן ששיעור ה-y הוא 5.

תשובה :

שיעורי הנקודות A, B : $A(1\,,5)$, $B(5\,,5)$



ג. (1) בסעיף זה התבקשנו לחשב את אורך הקטע CD.

נשים לב שקטע CD הוא קו אנכי המקביל לציר ה-y, ולכן נוכל לחשב את אורך הקטע על ידי מספר ה"צעדים" שהתקדמנו משיעור ה-y של נקודה C לשיעור ה-y של נקודה D.

שיעור ה-y של נקודה C הוא 9 (חישבנו בסעיף א') והנקודה D נמצאת על הישר y=5 ולכן שיעור ה-y שלה הוא 5.

כעת נחשב את ההפרש בין הגבהים :

$$CD = y_C - y_D = 9 - 5 = 4$$

תשובה :

אורך CD הוא 4 יחידות

(2) בסעיף זה התבקשנו לחשב את שטח משולש ABC, לכן נעזר בנוסחת שטח משולש:

$$S_{\text{משולש}} = \frac{\text{גובה לבסיס} \cdot \text{בסיס}}{2}$$

בסעיף קודם מצאנו את אורך הגובה לבסיס CD: CD = 4 יחידות

כעת נחשב את אורך הבסיס AB. בסעיף ב׳ מצאנו $A(1,5)$, $B(5,5)$. נשים לב שהקטע AB הוא קו אופקי המקביל לציר ה-x ולכן נחשב את הצעדים משיעור ה-x של נקודה A לשיעור ה-x של נקודה B:

$$AB = x_b - x_a = 5 - 1 = 4$$

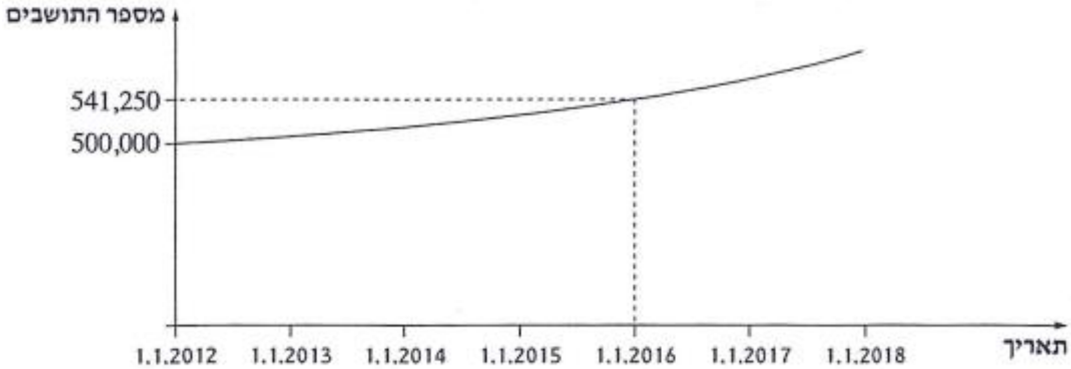
כעת, כשהנתונים בידינו נציב בנוסחת שטח המשולש:

$$S_{ABC} = \frac{AB\ X\ CD}{2} = \frac{4\ X\ 4}{2} = 8$$

תשובה:

שטח המשולש הוא 8 יח״ר

2. האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה בכל שנה באופן מעריכי.
הגרף שלפניך מתאר את גידול האוכלוסייה מן התאריך 1.1.2012 עד התאריך 1.1.2018 .



א. **(1)** מה היה מספר התושבים בעיר בתאריך 1.1.2012?

(2) מה היה מספר התושבים בעיר בתאריך 1.1.2016?

ב. **(1)** פי כמה גדל מספר התושבים בעיר במשך שנה אחת?

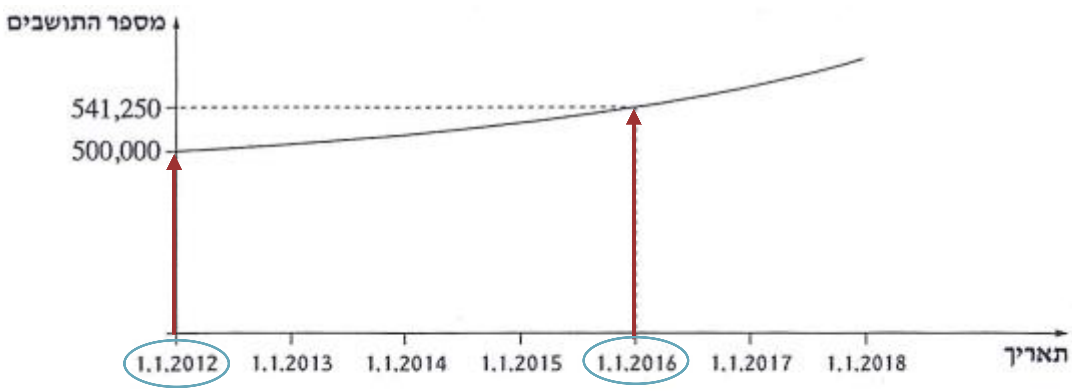
בתשובתך השאר שתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית.

(2) בכמה אחוזים גדל מספר התושבים בעיר במשך שנה אחת?

ג. כמה תושבים היו בעיר בתאריך 1.1.2018?

פתרון:

א.



(1) לפי הגרף ניתן לראות שמספר התושבים ב-1.1.2012 היה 500,000.

(2) לפי הגרף ניתן לראות שמספר התושבים ב-1.1.2016 היה 541,250.

ב. (1) בסעיף זה התבקשנו לחשב פי כמה גדל מספר התושבים כל שנה, כלומר לחשב את קצב הגדילה q :

בסעיף קודם מצאנו שב-2012 היו 500,000 תושבים ← $M_0 = 500{,}00$

בנוסף, מצאנו שב-2016 היו 541,250 תושבים ← $M_4 = 541{,}25$

הזמן שחלף בין 2012 ל-2016 הוא 4 שנים ← $t = 4$

נציב את הנתונים בהתאמה בנוסחה :

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

$$541{,}250 = 500{,}000 \cdot q^4 \quad /\div 500{,}000$$

$$1.0825 = q^4 \quad /\sqrt[4]{}$$

$$q = 1.02$$

תשובה :

מספר התושבים גדל כל שנה פי 1.02

(2) כדי למצוא את האחוז בו גדל מספר התושבים, נעזר בנוסחה :

$$q = \frac{100 + p}{100}$$

נציב $q = 1.02$:

$$1.02 = \frac{100 + p}{100} \quad / \cdot 100$$

$$102 = 100 + p \quad /-100$$

$$p = 2$$

תשובה :

מספר התושבים גדל כל שנה ב-2%.

ג. בסעיף זה התבקשנו למצוא את מספר התושבים בתאריך 1.1.2018.

נקבע את מספר התושבים בשנת 2012 כנקודת התחלה ← $M_0 = 500{,}000$

הזמן שחלף בין 1.1.2012 -ל 1.1.2018 הוא 6 שנים ← $t = 6$

את ערך הגדילה מצאנו בסעיף **ב (1)** ← $q = 1.02$

עלינו למצוא את M_6 ← $M_6 = ?$

נציב את הנתונים בנוסחה:

$$M_6 = 500{,}000 \cdot 1.02^6$$
$$M_6 = 563{,}081$$

תשובה:

מספר התושבים בתאריך 1.1.2018 הוא 563,081

<u>דרך נוספת:</u>

נקבע את מספר התושבים ב-2016 להיות נקודת התחלה ← $M_0 = 541{,}250$

הזמן שחלף מ-1.1.2016 ועד ל- 1.1.2018 הוא שנתיים ← $t = 2$

את ערך הגדילה מצאנו בסעיף **ב (1)** ← $q = 1.02$

עלינו למצוא את M_2 ← $M_2 = ?$

נציב את הנתונים בנוסחה:

$$M_2 = M_0 \cdot q^2$$
$$M_2 = 541{,}250 \cdot 1.02^2$$
$$M_2 = 563{,}117$$

תשובה:

מספר התושבים בתאריך 1.1.2018 הוא 563,117

**שימו לב שהתקבלו שתי תוצאות שונות – שתי הדרכים קבילות, וכל אחת מהתשובות תתקבל כתשובה נכונה.

3. שכרו של דני עלה בסכום קבוע בכל חודש.

בחודש הראשון לעבודתו קיבל דני שכר של 7,000 שקלים.

בחודש הרביעי לעבודתו קיבל דני שכר של 7,246 שקלים.

א. בכמה שקלים עלה השכר של דני בכל חודש?

דני עבד 12 חודשים.

ב. **(1)** מה היה השכר של דני בחודש ה-12?

(2) מה היה השכר הכולל של דני ב-12 החודשים שבהם עבד?

פתרון:

א. לפי הנתונים, בחודש הראשון קיבל דני שכר של 7,000 שקלים, כלומר $a_1 = 7{,}000$.

בנוסף, בחודש הרביעי קיבל 7,246 שקלים, כלומר $a_4 = 7{,}246$.

נציב את הנתונים בנוסחת איבר כללי:

$$a_4 = a_1 + d(4-1)$$

$$7{,}246 = 7{,}000 + d(4-1) \quad /-7{,}000$$

$$246 = 3d \quad /\div 3$$

$$d = 82$$

תשובה:

בכל חודש השכר של דני עלה ב-82 שקלים

ב. **(1)** בסעיף זה התבקשנו למצוא את השכר של דני בחודש ה-12, כלומר למצוא את a_{12}.

נציב את האיברים בנוסחת איבר כללי:

$$a_{12} = a_1 + d(12-1)$$

$$a_{12} = 7{,}000 + 11 \cdot 82$$

$$a_{12} = 7{,}902$$

תשובה:

השכר של דני בחודש ה-12 הוא 7,902 שקלים

(2) כדי למצוא את השכר הכולל עלינו לחשב את סכום השכר ב- 12 חודשים הראשונים, כלומר את S_{12}.

נתון: $a_1 = 7{,}000$, $d = 82$

נעזר בנוסחת הסכום:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + d(n-1)]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}[2 \cdot 7{,}000 + 82(12-1)]$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(14{,}902)$$

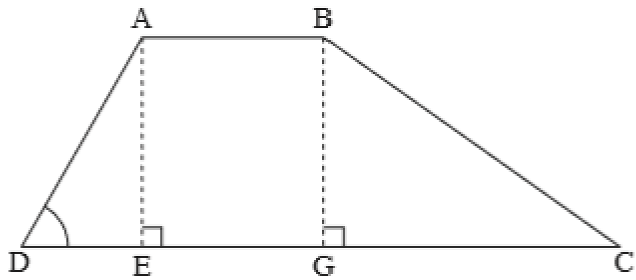
$$S_{12} = 6 \cdot 14{,}902 \ =$$

$$S_{12} = 89{,}412$$

תשובה:

השכר הכולל ב-12 חודשים הראשונים בהם דני עבד הוא 89,412 שקלים

טריגונומטריה



4. ABCD הוא טרפז (AB∥DC).

AE ו-BG הם גבהים בטרפז (ראה ציור).

נתון: 3 ס"מ = AB , 4 ס"מ = AD ,

5 ס"מ = GC , ∢ADC = 60° .

א. מצא את האורך של גובה הטרפז.

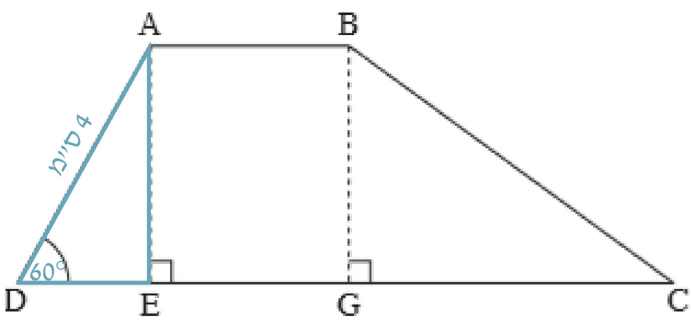
ב. מצא את גודל הזווית BCG.

ג. **(1)** חשב את אורך הצלע BC.

(2) חשב את היקף הטרפז ABCD.

פתרון:

א. בסעיף זה התבקשנו לחשב את גובה הטרפז. נתמקד תחילה במשולש ישר זווית ADE ונחשב את גובה הטרפז AE:



בגלל שאנו רוצים לחשב את הניצב AE שממול לזווית הנתונה ∢ADE, נשתמש בנוסחת הסינוס:

$$\sin 60 = \frac{AE}{4} \quad / \cdot 4$$

$$4 \cdot \sin 60 = AE$$

$$AE = 3.464$$

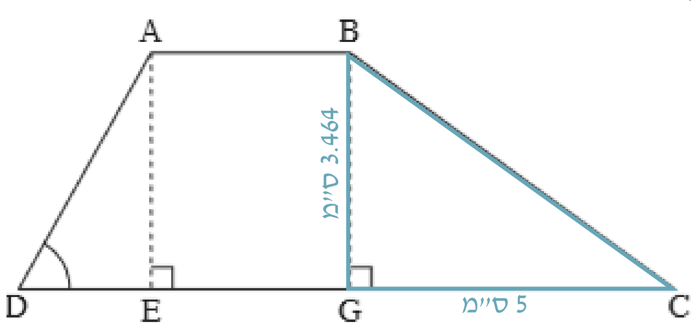
תשובה:

גובה הטרפז הוא 3.464 ס"מ

ב. נתמקד במשולש ישר זווית BGC:

BG הניצב מול הזווית המבוקשת במשולש הוא גם גובה בטרפז ולכן 3.464 ס"מ = BG = AE.

כמו כן, נתון הניצב ליד הזווית 5 ס"מ = GC. משום שנתונים לנו שני הניצבים, נשתמש בנוסחת הטנגנס:



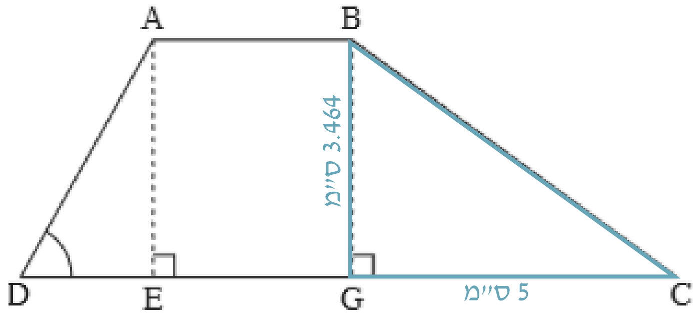
$$\tan BCG = \frac{BG}{GC}$$

$$\tan BCG = \frac{3.464}{5} \quad / \tan^{-1}\left(\frac{3.464}{5}\right)$$

$$\measuredangle BCG = 34.71°$$

תשובה:

גודל הזווית BCG הוא 34.71°



ג. (1) בסעיף זה עלינו לחשב את אורך BC.

נתמקד שוב במשולש ישר הזווית BGC:

נעזר במשפט פתגורס ונציב את הנתונים בהתאמה:

$$BG^2 + GC^2 = BC^2$$

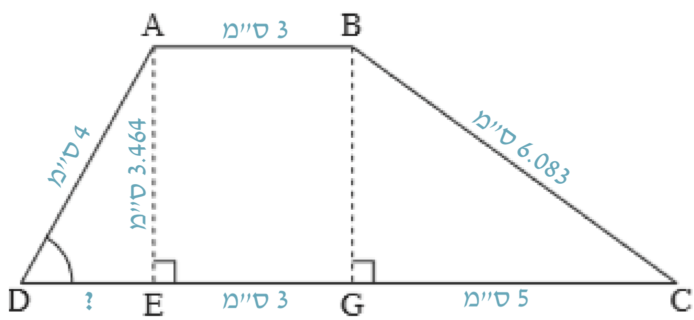
$$3.464^2 + 5^2 = BC^2$$

$$36.99 = BC^2 \qquad /\sqrt{}$$

$$BC = 6.083$$

תשובה:

אורך צלע BC 6.083 ס"מ



(2) בסעיף זה התבקשנו לחשב את היקף הטרפז. כלומר את סכום צלעותיו.

נשים לב ש AB = EG = 3 ס"מ ונשלים את אורכי הצלעות:

$$P_{\text{טרפז}} = AB + BC + DC + AD$$

נשים לב שחסרה לנו הצלע DE ונמצא אותה בעזרת משפט פיתגורס במשולש ישר זווית AED:

$$AE^2 + DE^2 = AD^2$$

$$3.464^2 + DE^2 = 4^2 \qquad /-3.464^2$$

$$DE^2 = 16 - 11.999 = 4.001$$

$$DE = 2$$

כעת נחשב את היקף הטרפז:

$$P_{\text{טרפז}} = AB + BC + CG + GE + DE + AD$$

$$P_{\text{טרפז}} = 3 + 6.083 + 5 + 3 + 2 + 4$$

$$P_{\text{טרפז}} = 23.083$$

תשובה:

היקף הטרפז הוא 23.083 ס"מ

הסתברות וסטטיסטיקה

5. מטילים שתי קוביות משחק הוגנות.

א. מהי ההסתברות ששתי הקוביות יראו את אותו המספר? נמק.

ב. מהי ההסתברות שסכום המספרים על הקוביות יהיה 7? נמק.

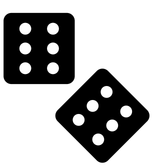
ג. מהי ההסתברות שמכפלת המספרים שעל הקוביות תהיה 6? נמק.

פתרון:

נציג את החלוקה לאפשרויות שונות בעזרת טבלה:

קובייה ב' / קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

נשים לב שיש 36 אפשרויות שונות לתוצאות שיראו הקוביות.



א. נבחן את הטבלה ונבדוק באילו מקרים יראו שתי הקוביות את אותו המספר:

קובייה ב' / קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	**(2,2)**	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	**(3,3)**	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	**(4,4)**	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	**(5,5)**	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	**(6,6)**

נשים לב שיש 6 מקרים כאלו מתוך 36 האפשרויות:

$$P(\text{אותו מספר}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

תשובה:

ההסתברות ששתי הקוביות יראו את אותו המספר היא $\frac{1}{6}$

ב. נבדוק באילו מהמקרים סכום התוצאות שווה ל-7:

קובייה ב' / קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	**(2,5)**	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	**(3,4)**	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	**(4,3)**	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	**(5,2)**	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	**(6,1)**	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(\text{סכום ההטלות} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

תשובה:

ההסתברות שסכום ההטלות יהיה 7 היא $\frac{1}{6}$

ג. נבחן את הטבלה ונבדוק באילו מקרים מכפלת התוצאות תהיה שווה ל-6:

קובייה ב' / קובייה א'	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	**(1,6)**
2	(2,1)	(2,2)	**(2,3)**	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	**(3,2)**	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	**(6,1)**	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$P(\text{מכפלת ההטלות} = 6) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

תשובה:

ההסתברות שמכפלת התוצאות תהיה שווה ל-6 היא $\frac{1}{9}$

6. תנובת החלב היומית של פרות ברפת מסוימת מתפלגת נורמלית עם סטיית תקן של 6 ליטרים.

ידוע ש-7% מן הפרות מניבות יותר מ-41 ליטרים ביום.

א. מצא אתץ הממוצע של תנובת החלב היומית של הפרות ברפת זו.

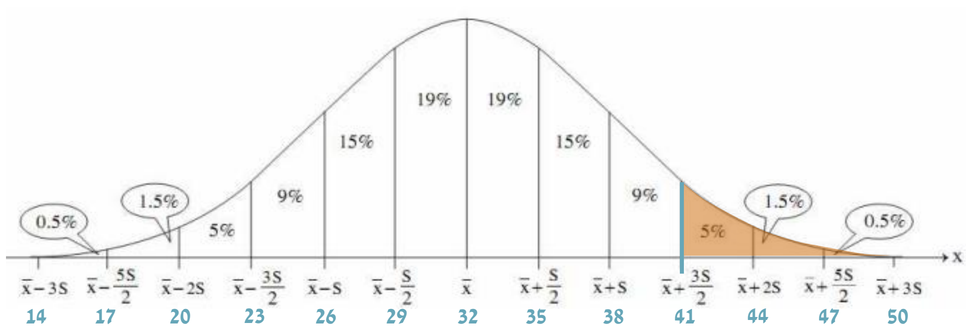
ב. כמה אחוזים מן הפרות ברפת מניבות פחות מ-20 ליטרים ביום?

ג. כמה אחוזים מן הפרות ברפת מניבות יותר מ-20 ליטרים ביום ופחות מ-29 ליטרים ביום?

ד. ברפת יש 400 פרות. על פי גרף ההתפלגות הנורמלית כמה מן הפרות מניבות יותר מ-41 ליטרים ביום?

פתרון:

א. לפי הנתונים, ידוע ש-7% מהפרות מניבות יותר מ-41 ליטרים ביום. כמו כן, נתון שסטיית התקן היא 6, ולכן חצי סטיית תקן היא 3. נשלים את הנתונים על גבי הגרף:

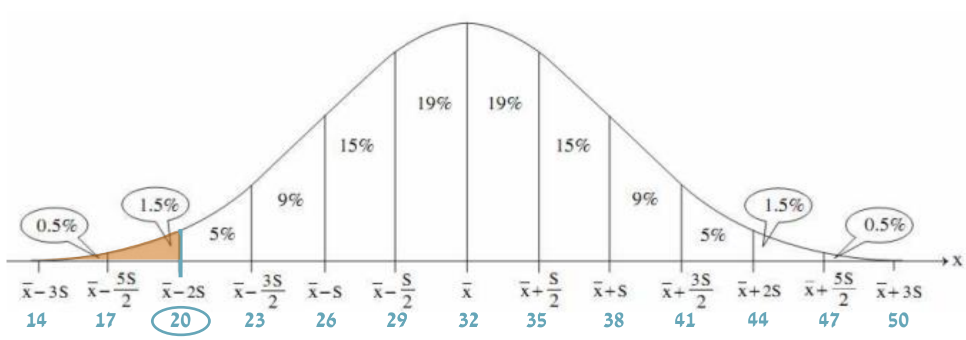


נוכל לראות לפי הגרף שהממוצע במרחק של אחת וחצי סטיות תקן מהממוצע.

תשובה:

הממוצע הוא 32 ליטר

ב. בסעיף זה עלינו לחשב את אחוז הפרות המניבות פחות מ-20 ליטר:



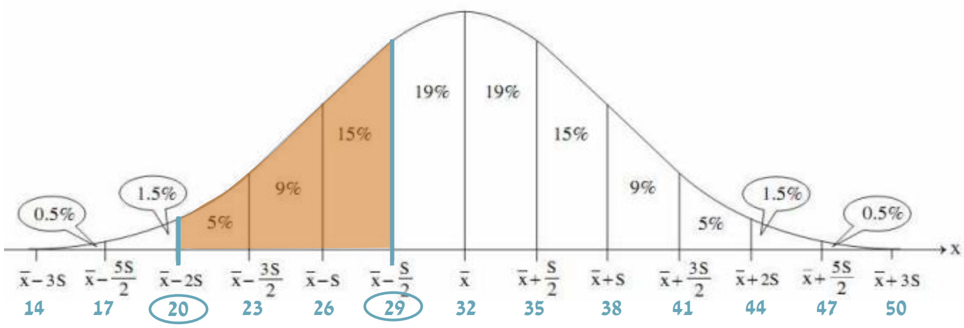
לפי הגרף, נוכל לראות שאחוז הפרות המניבות פחות מ-20 ליטר הוא 2%:

$$1.5\% + 0.5\% = 2\%$$

תשובה:

אחוז הפרות המניבות פחות מ-20 ליטר הוא 2%

ג. בסעיף זה עלינו לחשב את אחוז הפרות המניבות בין 20-29 ליטר.



לפי הגרף, נוכל לראות שאחוז הפרות המניבות בין 20-29 ליטר הוא 29%:

$$5\% + 9\% + 15\% = 29\%$$

תשובה:

אחוז הפרות המניבות בין 20-29 ליטר הוא 29%

ד. בסעיף זה עלינו למצוא את מספר הפרות המניבות יותר מ-41 ליטר ביום. לפי הנתונים, 7% מהפרות מניבות יותר מ-41 ליטר. כמו כן נתון שברפת יש סה"כ 400 פרות. כלומר, עלינו למצוא כמה הם 7% מתוך 400.

נעזר בנוסחת האחוז:

$$\text{חלק} = \text{השלם} \cdot \frac{\text{האחוז}}{100}$$

$$\text{חלק} = 400 \cdot \frac{7}{100}$$

$$28 = 400 \cdot \frac{7}{100}$$

תשובה:

מספר הפרות המניבות יותר מ-41 ליטר ביום הוא 28