

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(3)	(1)	(2)	(1)

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - בעיה מילולית - טווחים

השאלה:

בישיבת ועד תושבי השכונה עלתה הצעה כלשהי. 10 מהנוכחים בישיבה הצביעו בעד ההצעה, 3 מהנוכחים נמנעו, ושאר הנוכחים הצביעו נגד ההצעה. ההצעה התקבלה ברוב קולות, כלומר יותר מצביעי "בעד" ממצביעי "נגד". כמה תושבים נכחו בישיבה **לכל היותר**?

פיתרון:

התבונה המרכזית

מספר הנוכחים מורכב משלוש קבוצות בלבד - בעד, נמנעים ונגד. שתי הראשונות קבועות (10 ו-3), ולכן כדי שמספר הנוכחים יהיה גדול ככל האפשר, די למצוא את **מספר מצביעי הנגד המרבי**.

מציאת מספר מצביעי הנגד המרבי

ההצעה התקבלה ברוב קולות, כלומר מספר מצביעי "בעד" גדול ממספר מצביעי "נגד". מצביעי הבעד הם 10, ולכן מצביעי הנגד חייבים להיות פחות מ-10. מכיוון שמדובר במספר שלם של אנשים, הערך הגדול ביותר האפשרי הוא 9.

שימו לב

"יותר מ-" הוא אי-שוויון חד: 10 מצביעי בעד מול 10 מצביעי נגד אינם רוב, אלא תיקו. לכן המספר המרבי הוא 9 ולא 10, ומי שיטעה בכך יקבל 23 - אחת התשובות המוצעות.

חיבור שלוש הקבוצות

$$9 + 10 + 3 = 22$$

לכל היותר נכחו בישיבה 22 תושבים.

תשובה (3).

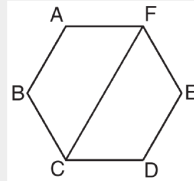


שאלה 2 - גיאומטריה - מרובעים, משושה משוכלל

השאלה:

$ABCDEF$ הוא משושה משוכלל שהיקפו $6a$ (ראו סרטוט).

מהו היקף הטרפז $ABCF$?



פיתרון:

אורך צלע המשושה

במשושה משוכלל שש צלעות שוות באורך. ההיקף הוא $6a$, ולכן אורך כל צלע הוא a ($\frac{6a}{6} = a$).

זיהוי צלעות הטרפז

הטרפז $ABCF$ מורכב משלוש צלעות של המשושה ומאלכסון אחד. הצלעות AB , BC ו- FA הן צלעות המשושה, ולכן אורך כל אחת מהן הוא a . הצלע הרביעית היא CF , שהוא אלכסון המחבר שני קדקודים נגדיים במשושה.

חבנת מפתח

האלכסון הראשי של משושה משוכלל, המחבר שני קדקודים נגדיים, עובר דרך מרכז המשושה ואורכו כפול מאורך הצלע. לפיכך אורך CF הוא $2a$.

חישוב ההיקף

$$a + a + a + 2a = 5a$$

היקף הטרפז הוא $5a$.

תשובה (2).

שאלה 3 - אלגברה - משוואות

השאלה:

נתון: $x, y \neq 0$

$$4x - xy = x^2$$

$$3x = y$$

$$y = ?$$

פיתרון:

הצבת המשוואה השנייה בראשונה

נתון $y = 3x$, ולכן נציב $3x$ במקום y במשוואה הראשונה:

$$4x - x \cdot 3x = x^2$$

$$4x - 3x^2 = x^2$$

פתרון המשוואה

נחבר $3x^2$ לשני האגפים, ונקבל:

$$4x = 4x^2$$

נחלק את שני האגפים ב- $4x$. החלוקה מותרת מכיוון שנתון $x \neq 0$:

$$1 = x$$

מציאת הנעלם המבוקש

נציב $x = 1$ במשוואה $3x = y$:

$$y = 3 \cdot 1 = 3$$

תשובה (3).



שאלה 4 - אלגברה - חזקות
השאלה:
 m הוא מספר שלם הגדול מ-1.

$$m^{2x} = m \cdot m^{(x^2)}$$

$$x = ?$$

פיתרון:
איחוד החזקות באגף אחד

 בכפל חזקות בעלות אותו בסיס מחברים את המעריכים. המספר m עצמו הוא m^1 , ולכן:

$$m \cdot m^{(x^2)} = m^{1+x^2}$$

המשוואה נעשית אפוא:

$$m^{2x} = m^{1+x^2}$$

חובת מפתח

 מכיוון ש- m הוא מספר שלם הגדול מ-1, שתי חזקות שלו שוות זו לזו רק אם מעריכיהן שווים. לפיכך אפשר להשוות בין המעריכים בלבד.

פתרון המשוואה שהתקבלה

$$2x = 1 + x^2$$

נעביר את כל האיברים לאגף אחד:

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

לפי נוסחת הכפל המקוצר אגף שמאל הוא ריבוע של הפרש:

$$(x - 1)^2 = 0$$

 ריבוע שווה לאפס רק כאשר הביטוי עצמו שווה לאפס, ומכאן ש- $x = 1$.

דרכי בדיקת התשובות

 אפשר גם לוותר על הפתרון האלגברי ולהציב כל תשובה במשוואה $m^{2x} = m \cdot m^{(x^2)}$, ולבדוק אם שני האגפים שווים:

 תשובה (1), $x = 1$: אגף שמאל m^2 , אגף ימין $m^2 = m \cdot m^1$. שווים - זו התשובה.

 תשובה (2), $x = 2$: אגף שמאל m^4 , אגף ימין $m^5 = m \cdot m^4$. אינם שווים.

 תשובה (3), $x = 0$: אגף שמאל $m^0 = 1$, אגף ימין $m \cdot m^0 = m$. מכיוון ש- m גדול מ-1 אין הם שווים.

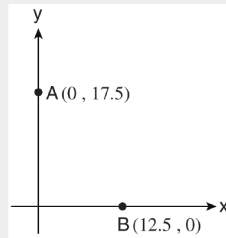
 תשובה (4), $x = m$: אגף שמאל m^{2m} , אגף ימין m^{1+m^2} . השוויון היה מחייב $2m = 1 + m^2$, כלומר $m = 1$ - בסתירה לנתון ש- m גדול מ-1.

תשובה (1).

שאלה 5 - גיאומטריה - משולש ישר-זווית, טווחים

השאלה:

לפי הנתונים במערכת הצירים שלפניכם, אורך הקטע AB בוודאות _____ מ-30, מספיק נתונים לחשב.



פיתרון:

בניית משולש ישר-זווית

הנקודה A נמצאת על ציר ה- y בגובה 17.5, והנקודה B נמצאת על ציר ה- x במרחק 12.5 מן הראשית. הקטע AB הוא היתר במשולש ישר-זווית שניצביו הם 12.5 ו-17.5, והזווית הישרה נמצאת בראשית הצירים.

חובנת מפתח

סכום שני הניצבים הוא $12.5 + 17.5 = 30$, ובכל משולש אורך צלע קטן מסכום שתי הצלעות האחרות. לפיכך אורך היתר AB קטן בהכרח מ-30, ואין כל צורך בחישוב.

האם יש די נתונים

החלק השני של השאלה אינו מבקש לחשב את האורך אלא רק לקבוע אם אפשר לחשב. אורכי שני הניצבים ידועים - 12.5 ו-17.5 - ומשפט פיתגורס נותן את היתר מתוכם:

$$AB = \sqrt{12.5^2 + 17.5^2}$$

כל הנתונים הדרושים לנוסחה מצויים בידינו, ולכן יש די נתונים לחישוב. אין כל צורך להשלים את החישוב עצמו - ובוודאי לא במחשבון - שכן השאלה מסתפקת בעצם האפשרות. בכך נפסלות שתי התשובות הטוענות שאין די נתונים.

תשובה (3).

שאלה 6 - בעיה מילולית - יחס

השאלה:

אלישבע תרמה את כל ספריה לשלושה בתי ספר. יחס החלוקה היה 11 : 9 : 5. היא תרמה 575 ספרים סך הכול. כמה ספרים קיבל בית הספר שאלישבע תרמה לו את מספר הספרים הרב ביותר?

פיתרון:

חישוב ערכו של חלק אחד ביחס

היחס 11 : 9 : 5 מחלק את כלל הספרים ל- $11 + 9 + 5 = 25$ חלקים שווים. מכיוון שסך הספרים הוא 575, גודלו של חלק אחד הוא:

$$\frac{575}{25} = 23$$

חישוב המנה הגדולה ביותר

בית הספר שקיבל את מספר הספרים הרב ביותר מקבל 11 חלקים:

$$11 \cdot 23 = 253$$

בית ספר זה קיבל 253 ספרים.

תשובה (4).

שאלה 7 - בעיה מילולית - צירופים

השאלה:

אורן, בתיה, גלית ודניאל מתמודדים בתחרות שירה.
3 מהם יעלו לשלב הגמר.
כמה הרכבים שונים יכולים להיות לשלישייה שתעלה לשלב הגמר?

פיתרון:

חובנת מפתח

במקום לספור אילו שלושה עולים, נוה יותר לספור מי אינו עולה. בחירת שלושה מתוך ארבעה שקולה לחלוטין לבחירת המתמודד היחיד שנשאר בחוץ.

ספירת האפשרויות

המתמודד שאינו עולה לגמר יכול להיות אורן, בתיה, גלית או דניאל, כלומר ארבע אפשרויות. לכל אחת מהן מתאים הרכב אחד ויחיד של שלישיית העולים, ולכן יש 4 הרכבים אפשריים.

תשובה (4).

שאלה 8 - גיאומטריה - מעגל וגזרת מעגל

השאלה:

בסרטוט שלפניכם מעגל וגזרת מעגל ששטחיהם שווים זה לזה.
לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט, $x = ?$



פיתרון:

התובנה המרכזית

הגזרה נגזרה ממעגל שרדיוסו $3r$, ולכן יחס הרדיוסים בין המעגל הקטן ובין המעגל הגדול הוא $1 : 3$. בצורות דומות יחס השטחים הוא **ריבוע** יחס האורכים, ולפיכך יחס השטחים הוא $1 : 9$ - המעגל הגדול גדול פי 9 מן הקטן. מכאן אפשר לענות כמעט בלי חישוב.

מהו חלקה של הגזרה מן המעגל הגדול

נתון ששטח הגזרה שווה לשטח המעגל הקטן. מכיוון שהמעגל הקטן הוא תשיעית מן המעגל הגדול, גם הגזרה היא תשיעית מן המעגל הגדול שממנו נגזרה.

מזווית לחלק ומחלק לזווית

חלקה של גזרה מן המעגל שווה ליחס בין זווית הראש שלה ל- 360° . אם הגזרה היא תשיעית מן המעגל, גם זווית הראש שלה היא תשיעית מ- 360° :

$$x = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

דרך ב' - החישוב המלא

למי שמעדיף לרשום את הכול: שטח המעגל הקטן הוא πr^2 , ושטח המעגל השלם שממנו נגזרה הגזרה הוא $9\pi r^2 = \pi(3r)^2$. שטח הגזרה הוא אפוא $\frac{x}{360} \cdot 9\pi r^2$, ולפי הנתון:

$$\pi r^2 = \frac{x}{360} \cdot 9\pi r^2$$

נחלק את שני האגפים ב- πr^2 :

$$1 = \frac{9x}{360}$$

$$\text{ומכאן } x = \frac{360}{9} = 40$$

תשובה (4).

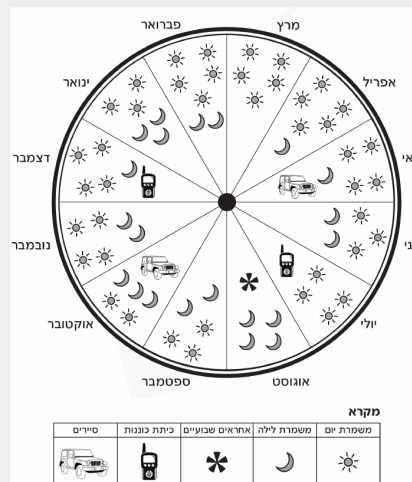
הסקה מתרשים (שאלות 9-13)

שאלה 9 - הסקה מתרשים

השאלה:

בשבוע כלשהו קיבל אחד המאבטחים 2 משמרות לילה.

לפיכך, לא ייתכן כי באותו השבוע קיבל אותו מאבטח _____ משמרות יום.



פיתרון:

הכלי המרכזי לחמש השאלות

לכל אחד משנים עשר הפלחים יש "פרופיל" קבוע: מספר משמרות היום, מספר משמרות הלילה ותפקיד מיוחד אם יש. הגלגל מסתובב, ולכן כל פלח יכול לעמוד מול כל חודש, אך תוכנו אינו משתנה לעולם. נסכם את שנים עשר הפלחים לפי מיקומם הנוכחי בתרשים:

הפלח שמול חודש	משמרות יום	משמרות לילה	תפקיד מיוחד
מרץ	5	0	-
אפריל	5	1	-
מאי	4	1	סיירים
יוני	3	2	-
יולי	4	0	כיתת כוננות
אוגוסט	0	4	אחראים שבועיים
ספטמבר	3	2	-
אוקטובר	2	3	סיירים
נובמבר	4	2	-
דצמבר	4	1	כיתת כוננות
ינואר	3	3	-
פברואר	5	2	-

איתור הפלחים שבהם שתי משמרות לילה

נחפש בטבלה את הפלחים שבהם בדיוק שתי משמרות לילה: הפלח שמול יוני (3 משמרות יום), הפלח שמול ספטמבר (3 משמרות יום), הפלח שמול נובמבר (4 משמרות יום) והפלח שמול פברואר (5 משמרות יום).

בדיקת התשובות

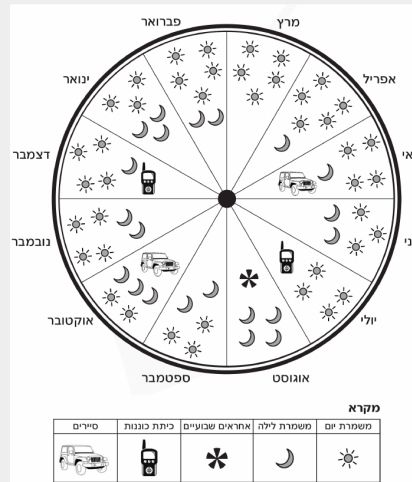
מספר משמרות היום האפשריות לצד שתי משמרות לילה הוא אפוא 3, 4 או 5 בלבד. מבין התשובות המוצעות - 2, 3 ו-4 - המספר היחיד שאינו ברשימה הוא 2.

תשובה (2).

שאלה 10 - הסקה מתרשים

השאלה:

דן ושיר חוגגים ימי הולדת במרווח של שבוע זה מזה.
בשבוע כלשהו היה דן אחראי שבועי.
לפיכך, באותו שבוע שיר בוודאות לא -



פיתרון:

מה נובע ממרווח של שבוע

ימי ההולדת של דן ושיר מרוחקים זה מזה שבוע בלבד, ולכן שניהם נולדו באותו חודש או בשני חודשים עוקבים. מכאן שהפלח של שיר הוא הפלח של דן עצמו, או אחד משני הפלחים הסמוכים לו בגלגל.

איתור הפלחים הסמוכים

פלח האחראים השבועיים הוא זה שמול אוגוסט בתרשים. שני שכניו בגלגל הם הפלח שמול יולי (4 משמרות יום וכיתת כוננות) והפלח שמול ספטמבר (3 משמרות יום ו-2 משמרות לילה). סדר הפלחים בגלגל קבוע, ולכן שכנות זו נשמרת בכל מצב שבו ייעצר הגלגל.

הפלח שמול חודש	משמרות יום	משמרות לילה	תפקיד מיוחד
מרץ	5	0	-
אפריל	5	1	-
מאי	4	1	סירים
יוני	3	2	-
יולי	4	0	כיתת כוננות
אוגוסט	0	4	אחראים שבועיים
ספטמבר	3	2	-
אוקטובר	2	3	סירים
נובמבר	4	2	-
דצמבר	4	1	כיתת כוננות
ינואר	3	3	-
פברואר	5	2	-

בדיקת התשובות

שיר הייתה יכולה להיות אחראית שבועית, אילו נולדה באותו חודש כמו דן - תשובה (1) אפשרית. היא הייתה יכולה להיות חברה בכיתת הכוננות, אם הפלח שמולה הוא זה שמול יולי - תשובה (2) אפשרית. היא הייתה יכולה לעבוד במשמרת לילה, שכן בפלח של דן יש 4 משמרות לילה ובפלח שמול ספטמבר יש 2 - תשובה (4) אפשרית.

התשובה הנכונה

שני פלחי הסירים הם אלה שמול מאי ומול אוקטובר, ואף אחד מהם אינו סמוך לפלח האחראים השבועיים ואינו הפלח עצמו. לפיכך שיר בוודאות לא הייתה סירת באותו שבוע.

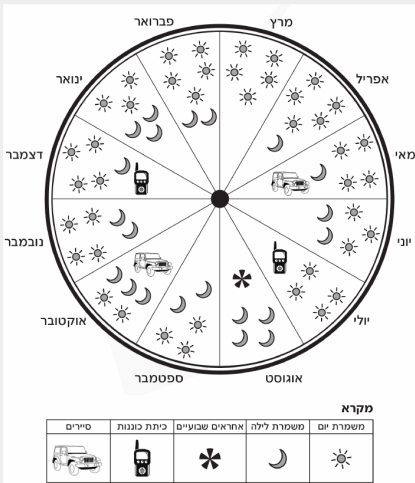
תשובה (3).

שאלה 11 - הסקה מתרשים - הסתברות

השאלה:

נועה היא אחת ממאבטחי המוזיאון.

בשבוע כלשהו, מה הסיכוי שנועה לא תהיה חברה בכיתת הכוננות וגם לא תהיה סיירת?



פיתרון:

מרחב האפשרויות

הגלגל נעצר בכל שבוע במצב כלשהו, ולכן מול חודש הלידה של נועה יכול לעמוד כל אחד משנים עשר הפלחים, בהסתברות שווה. מרחב האפשרויות מונה אפוא 12 מקרים.

ספירת המקרים הלא רצויים

בתרשים יש שני פלחים של כיתת כוננות (אלה שמול יולי ומול דצמבר) ושני פלחים של סיירים (אלה שמול מאי ומול אוקטובר). סך הכול 4 פלחים שבהם נועה תהיה חברה בכיתת הכוננות או סיירת.

הפלח שמול חודש	משמרות יום	משמרות לילה	תפקיד מיוחד
מרץ	5	0	-
אפריל	5	1	-
מאי	4	1	סיירים
יוני	3	2	-
יולי	4	0	כיתת כוננות
אוגוסט	0	4	אחראים שבועיים
ספטמבר	3	2	-
אוקטובר	2	3	סיירים
נובמבר	4	2	-
דצמבר	4	1	כיתת כוננות
ינואר	3	3	-
פברואר	5	2	-

חישוב ההסתברות

נותרו $12 - 4 = 8$ פלחים שבהם נועה אינה חברה בכיתת הכוננות ואינה סיירת:

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

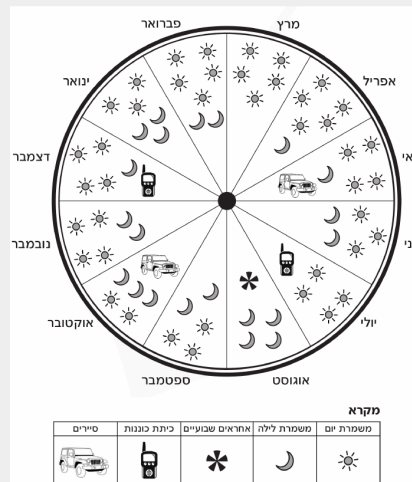
תשובה (3).



שאלה 12 - הסקה מתרשים

השאלה:

אחד המאבטחים קיבל בשבועיים 7 משמרות לילה סך הכול.
לפיכך אפשר לדעת בוודאות כי לפחות פעם אחת בשבועיים אלו -



פיתרון:

מספרי משמרות הלילה האפשריים

נמנין את הפלחים לפי מספר משמרות הלילה שבהם: 4 משמרות לילה בפלח האחראים השבועיים (זה שמול אוגוסט); 3 משמרות לילה בפלח שמול אוקטובר ובפלח שמול ינואר; 2 משמרות לילה בארבעה פלחים; ופחות מכך בשאר.

הפלח שמול חודש	משמרות יום	משמרות לילה	תפקיד מיוחד
מרץ	5	0	-
אפריל	5	1	-
מאי	4	1	סיירים
יוני	3	2	-
יולי	4	0	כיתת כוננות
אוגוסט	0	4	אחראים שבועיים
ספטמבר	3	2	-
אוקטובר	2	3	סיירים
נובמבר	4	2	-
דצמבר	4	1	כיתת כוננות
ינואר	3	3	-
פברואר	5	2	-

חובנת מפתח

מספר משמרות הלילה הגדול ביותר בפלח בודד הוא 4, והשני בגודלו הוא 3. לכן הדרך היחידה להגיע ל-7 משמרות לילה בשבועיים היא $3 + 4$: בלא הפלח בעל 4 משמרות הלילה אפשר להגיע ל-6 לכל היותר.

מסקנה

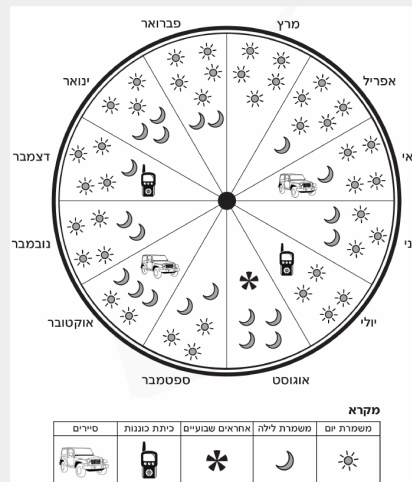
הפלח שבו 4 משמרות לילה הוא פלח האחראים השבועיים, ולפיכך המאבטח היה אחראי שבועי לפחות פעם אחת בשבועיים אלו. לעומת זאת השבוע האחר יכול להיות הפלח שמול אוקטובר (סיירים) או זה שמול ינואר (בלא תפקיד מיוחד), ולכן אין ודאות לגבי שאר התשובות.

תשובה (3).

שאלה 13 - הסקה מתרשים

השאלה:

עידו הוא יליד מרץ, והוא היה בשבוע כלשהו חבר בכיתה הכוננות.
מכאן שהאחרים השבועיים באותו שבוע היו ילידי -



פיתרון:

חובנת מפתח

סדר הפלחים בגלגל קבוע ואינו משתנה; הסיבוב רק מזיז את כולם יחד. לכן די לספור כמה מקומות מפרידים בגלגל בין פלח כיתה הכוננות ובין פלח האחראים השבועיים, ואתו מרווח יישמר גם לאחר הסיבוב.

שתי האפשרויות לפלח שמול מרץ

עידו יליד מרץ היה בכיתה הכוננות, ולכן מול מרץ עמד אחד משני פלחי הכוננות: הפלח שמול יולי בתרשים או הפלח שמול דצמבר בתרשים.

הפלח שמול חודש	משמרות יום	משמרות לילה	תפקיד מיוחד
מרץ	5	0	-
אפריל	5	1	-
מאי	4	1	סיירים
יוני	3	2	-
יולי	4	0	כיתה כוננות
אוגוסט	0	4	אחראים שבועיים
ספטמבר	3	2	-
אוקטובר	2	3	סיירים
נובמבר	4	2	-
דצמבר	4	1	כיתה כוננות
ינואר	3	3	-
פברואר	5	2	-

אפשרות א' - הפלח שמול יולי

בתרשים פלח האחראים השבועיים (זה שמול אוגוסט) בא מייד אחרי פלח זה בכיוון סדר החודשים. אם פלח זה עמד מול מרץ, הרי שפלח האחראים השבועיים עמד מול החודש שאחרי מרץ, כלומר אפריל.

אפשרות ב' - הפלח שמול דצמבר

בתרשים פלח האחראים השבועיים בא ארבעה מקומות לפני הפלח שמול דצמבר, בכיוון סדר החודשים (אוגוסט, ספטמבר, אוקטובר, נובמבר ואז דצמבר). אם פלח זה עמד מול מרץ, הרי שפלח האחראים השבועיים עמד מול החודש הרביעי שלפני מרץ, כלומר נובמבר (נובמבר, דצמבר, ינואר, פברואר ואז מרץ).

מסקנה

האחראים השבועיים באותו שבוע היו אפוא ילידי אפריל או ילידי נובמבר.

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 14-20)

שאלה 14 - בעיה מילולית - אחוזים

השאלה:

נתון: $x, b \neq 0, \frac{x}{7} = b$
 x שווה ל- _____ אחוזים מ- b .

פיתרון:

בידוד הנעלם

נכפול את שני האגפים ב-7, ונקבל:

$$x = 7b$$

כלומר x גדול פי 7 מ- b .

חובנת מפתח

מספר השווה לגודל שלם כלשהו הוא 100% ממנו. לפיכך גודל הגדול פי 7 הוא $700\% = 7 \cdot 100\%$ ממנו, ולא אחוזים יותר ממנו.

דרך ב' - הצבת דוגמה מספרית

נציב $b = 1$, ולכן $x = 7$. השאלה היא כמה אחוזים הוא 7 מ-1:

$$\frac{7}{1} \cdot 100 = 700$$

תשובה (4).



שאלה 15 - אלגברה - ממוצעים, אי-שוויונים

השאלה:

נתון: x הוא מספר גדול מ-1.

$$x \cdot y = 1$$

M הוא הממוצע של x ו- y .

איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח בנוגע ל- M ?

פיתרון:

דרך א' - הצבת דוגמאות מספריות

נציב $x = 2$. מכיוון ש- $x \cdot y = 1$, נקבל $y = 0.5$, והממוצע הוא $\frac{2+0.5}{2} = 1.25$. הגדול מ-1. נציב כעת $x = 10$ ונקבל $y = 0.1$, והממוצע הוא $\frac{10+0.1}{2} = 5.05$. אף הוא גדול מ-1. שתי הדוגמאות פוסלות את תשובות (2), (3) ו-(4).

דרך ב' - הוכחה כללית

מן הנתון $x \cdot y = 1$ עולה $y = \frac{1}{x}$. ולכן נוסחת הממוצע היא:

$$M = \frac{x + \frac{1}{x}}{2}$$

כעת נבדוק את הטענה שבתשובה (1), כלומר שמתקיים $M > 1$. נציב את הנוסחה במקום M ונקבל אי-שוויון שכולו ב- x :

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} > 1$$

פישוט אי-השוויון

נכפול את שני האגפים ב-2:

$$x + \frac{1}{x} > 2$$

נכפול את שני האגפים ב- x . מכיוון שנתון ש- x גדול מ-1 הוא חיובי, וכפל במספר חיובי אינו הופך את כיוון אי-השוויון:

$$x^2 + 1 > 2x$$

נעביר את כל האיברים לאגף אחד:

$$x^2 - 2x + 1 > 0$$

ולפי נוסחת הכפל המקוצר:

$$(x - 1)^2 > 0$$

סיום ההוכחה

ריבוע של מספר אינו שלילי לעולם, והוא שווה לאפס רק כאשר המספר עצמו אפס - כאן רק אם $x = 1$. אך נתון ש- x גדול מ-1, ולכן $(x - 1)^2$ חיובי ממש, ואי-השוויון מתקיים תמיד. מכיוון שכל המעברים היו הפיכים, גם אי-השוויון שממנו יצאנו $M > 1$ - מתקיים בהכרח.

תשובה (1).



שאלה 16 - אלגברה - ראשוניים, חילוקים

השאלה:

$$y = \frac{a-b}{x}$$

נתון: a ו- b הם מספרים ראשוניים, גדולים מ-10 ושונים זה מזה.

x ו- y הם שני מספרים שלמים וגדולים מ-1.

איזו מהטענות הבאות נכונה בנוגע ל- x ול- y ?

פיתרון:

ניסוח הנתון כמכפלה

נכפול את שני אגפי הנתון ב- x , ונקבל:

$$x \cdot y = a \cdot b$$

דרך א' - הצבת דוגמה מספרית

במקום לעבוד עם אותיות, נבחר שני ראשוניים גדולים מ-10 ושונים זה מזה - למשל $a = 11$ ו- $b = 13$. אז:

$$x \cdot y = 11 \cdot 13 = 143$$

כעת נשאל: באילו שתי דרכים אפשר לרשום את 143 כמכפלה של שני מספרים שלמים? רק $143 = 1 \cdot 143$ ו- $143 = 11 \cdot 13$, שהרי 143 אינו מתחלק ב-2, ב-3, ב-5 או ב-7. מכיוון שנתון ששני המספרים גדולים מ-1, האפשרות הראשונה נפסלת, ונותר ש- x ו- y הם 11 ו-13 בסדר כלשהו - כלומר **שניהם ראשוניים**.

דרך ב' - הנימוק הכללי

מה שראינו בדוגמה נכון תמיד: מספר ראשוני מתחלק ב-1 ובעצמו בלבד, ולכן למכפלה $a \cdot b$ יש בדיוק ארבעה מחלקים - 1, a , b ו- $a \cdot b$. נתון ששני המספרים x ו- y גדולים מ-1, ולכן אף אחד מהם אינו 1; וגם אף אחד מהם אינו $a \cdot b$ כולו, שאם כן היה השני שווה ל-1. נותר שאחד מהם הוא a והאחר b , ושניהם ראשוניים בהכרח.

פסילת יתר התשובות

נמשיך בדוגמה: x ו- y הם 11 ו-13.

תשובה (3) טוענת שיתכן ש- $x = y$ - אך 11 שונה מ-13, ובאופן כללי היה מתקיים $x^2 = a \cdot b$, שאינו אפשרי כאשר a ו- b שונים זה מזה.

תשובה (4) טוענת שיתכן $x = 2y$ - אך 11 ו-13 שניהם אי-זוגיים, ואי-זוגי אינו יכול להיות כפול 2 של מספר שלם. זה נכון לכל שני ראשוניים גדולים מ-10, שכן כולם אי-זוגיים.

גם תשובה (2) נפסלת, שכן הראינו ששניהם ראשוניים.

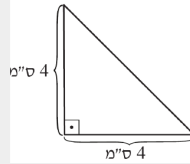
תשובה (1).



שאלה 17 - גיאומטריה - שטחים, ספירה

השאלה:

לאילנה דף בצורת משולש כבסרטוט, ומדבקות בצורת ריבוע ששטח כל אחת מהן 1 סמ"ר. היא מעוניינת להדביק את המדבקות על הדף המשולש כך שלא יכסו זו את זו ולא יחרגו מגבולות הדף, ובלי לחתוך שום מדבקה (את כולן היא מדביקה על אותו צד של הדף). כמה מדבקות שלמות, לכל היותר, תוכל אילנה להדביק כך?



פיתרון:

מדי המדבקה

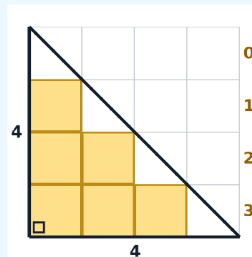
שטח כל מדבקה הוא 1 סמ"ר והיא ריבוע, ולכן אורך צלעה 1 ס"מ.

חבנת מפתח

נחלק את הדף לרצועות אופקיות שגובה כל אחת 1 ס"מ, כגובה המדבקה. בכל רצועה אפשר להניח מדבקות רק לרוחב הצר ביותר שלה, כלומר לרוחב הקצה העליון, שהרי המדבקה חייבת להיכנס כולה בתוך המשולש.

שרטוט עזר

כך נראית החלוקה לרצועות ובה סידור המדבקות המרבי. המספר שמימין לכל רצועה הוא מספר המדבקות שנכנסות בה:



ספירה רצועה אחר רצועה

הניצבים הם באורך 4 ס"מ כל אחד, ולכן ברצועה התחתונה (מגובה 0 עד 1) הרוחב בקצה העליון הוא 3 ס"מ, ואפשר להניח בה 3 מדבקות. ברצועה השנייה (מגובה 1 עד 2) הרוחב בקצה העליון הוא 2 ס"מ, ואפשר להניח 2 מדבקות. ברצועה השלישית (מגובה 2 עד 3) הרוחב בקצה העליון הוא 1 ס"מ, ואפשר להניח מדבקה אחת. ברצועה העליונה הרוחב בקצה העליון הוא 0, ולא נכנסת בה אף מדבקה.

סיכום

$$3 + 2 + 1 = 6$$

אילנה תוכל להדביק 6 מדבקות שלמות לכל היותר.

תשובה (3).



שאלה 18 - בעיה מילולית - תנועה

השאלה:

חללית טסה מכדור הארץ לירח בקו ישר במהירות קבועה של 100 קמ"ש. המרחק בין כדור הארץ לבין הירח הוא כ-380,000 ק"מ. איזה ממשכי הזמן הבאים הוא הקרוב ביותר למשך הזמן שיידרש לחללית להגיע לירח? (ביממה יש 24 שעות ובשנה יש 365 ימות)

פיתרון:

חישוב הזמן בשעות

זמן שווה למרחק מחולק במהירות:

$$\frac{380,000}{100} = 3,800$$

הטיסה תימשך 3,800 שעות.

מעבר לימים - צמצום איטי

ביממה יש 24 שעות, ולכן יש לחשב $\frac{3,800}{24}$. אין צורך בחילוק ארוך: נצמצם בשלבים, כל פעם במספר קטן ונוח.

$$\frac{3,800}{24} = \frac{1,900}{12}$$

צמצמנו ב-2.

$$\frac{1,900}{12} = \frac{950}{6}$$

צמצמנו שוב ב-2.

$$\frac{950}{6} = \frac{475}{3}$$

וצמצמנו ב-2 בפעם השלישית.

כעת נותרה חלוקה פשוטה: $158 \approx 3 : 475$. הטיסה תימשך כ-158 ימים.

חישוב מקורב - מהיר עוד יותר

השאלה מבקשת את משך הזמן הקרוב ביותר, ולכן די בהערכה גסה. נעגל את המונה ואת המכנה למספרים נוחים במיוחד:

$$\frac{3,800}{24} \approx \frac{4,000}{25} = 160$$

החלוקה ב-25 קלה, שכן $100 = 4 \cdot 25$, ולכן $160 = 4 \cdot 40$. $\frac{4,000}{25} = 160$. ימים 160 ו-158 ימים מובילים לאותה תשובה בדיוק, ולכן ההערכה מספיקה.

השוואה לתשובות

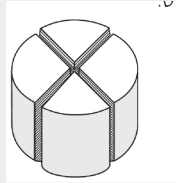
חצי שנה היא כ-182 ימים, ולכן ההפרש ממנה הוא כ-24 ימים בלבד. שנתיים הן כ-730 ימים, 30 ימים רחוקים ב-128 ימים, ושבעה חודש אף יותר. משך הזמן הקרוב ביותר הוא אפוא חצי שנה.

תשובה (1).

שאלה 19 - גיאומטריה - גופים, שטח פנים

השאלה:

גליל שרדיוס בסיסו r וגובהו h , נחתך ל-4 חלקים זהים כבסרטוט.
מה שטח הפנים של כל אחד מ-4 החלקים?



פיתרון:

חובת מפתח

החיתוך נעשה בשני מישורים אנכיים העוברים דרך ציר הגליל. לכל רבע מתקבלים חמישה משטחים: רבע מן הבסיס העליון, רבע מן הבסיס התחתון, רבע מן המעטפת, ושני מלבנים חדשים שנוצרו בחיתוך עצמו.

שטח שני חלקי הבסיסים

שטח בסיס שלם הוא πr^2 , ולכן שטח רבע ממנו הוא $\frac{\pi r^2}{4}$. יש שני בסיסים:

$$2 \cdot \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi r^2}{2}$$

שטח חלק המעטפת

מעטפת הגליל היא מלבן שאורכו היקף הבסיס ורוחבו גובה הגליל, כלומר $2\pi r h$. רבע ממנה:

$$\frac{2\pi r h}{4} = \frac{\pi r h}{2}$$

שטח שני מישורי החיתוך

כל אחד משני המשטחים שנוצרו בחיתוך הוא מלבן שצלעותיו r (הרדיוס) ו- h (הגובה), ולכן שטח שניהם:

$$2rh$$

חיבור הכול

$$\frac{\pi r^2}{2} + \frac{\pi r h}{2} + 2rh = \frac{\pi r(r+h)}{2} + 2rh$$

הוצאנו גורם משותף משני האיברים הראשונים.

תשובה (2).

שאלה 20 - בעיה מילולית - טווחים, קבוצות
השאלה:

רותי, שלומית ותמר רוצות לערוך מסיבה.
נתון: לכל אחת מהן יש 30 חברים.
לכל שתיים מהן יש 10 חברים משותפים.
הן החליטו להזמין למסיבה את כל האנשים שהם חברים **משותפים לשלושתן**, ורק אותם.
מה הטווח המדויק של מספר המוזמנים למסיבה?

פיתרון:
מה מגביל את המספר מלמעלה

כל אדם שהוא חבר של שלושתן הוא בהכרח גם חבר משותף של רותי ושל שלומית. מכיוון שלשתיהן יש 10 חברים משותפים בלבד, מספר המוזמנים אינו יכול לעלות על 10.

האם 10 אפשרי

אם עשרת החברים המשותפים לרותי ולשלומית הם בדיוק עשרת החברים המשותפים לרותי ולתמר, וגם בדיוק עשרת החברים המשותפים לשלומית ולתמר, הרי שכל העשרה חברים של שלושתן. כל הנתונים מתקיימים, ולכן 10 מוזמנים אפשריים.

האם 0 אפשרי

אפשר גם שאף אחד לא יהיה חבר של שלושתן: ד"כ ששלוש קבוצות החברים המשותפים לזוגות יהיו זרות זו לזו לחלוטין. לכל אחת מהן דרושים אז 20 חברים לשם כך $(10 + 10)$, ומכיוון שלכל אחת יש 30 חברים הדבר אפשרי בהחלט.

שימו לב

השאלה מבקשת את הטווח המדויק, כלומר טווח שכל ערך בתוכו אפשרי ואין ערך אפשרי מחוצה לו. מצאנו שהמינימום הוא 0 והמקסימום הוא 10, ולכן הטווח הוא בין 0 ל-10.

תשובה (1).