מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(1)	(3)	(4)	(2)	(4)	(4)	(3)	(3)	(4)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(1)	(3)	(2)	(3)	(3)	(1)	(1)	(4)	(2)

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1

השאלה:

אבינועם בחר מספר זוגי, הוסיף לו 5, הכפיל ב-3, ואז החסיר 2. המספר שהתקבל בהכרח -

פתרון:

__דרך א' - הצבת דוגמה מספרית:__

נציב $n = 2$ (מספר זוגי): $(2 + 5) \cdot 3 - 2 = 7 \cdot 3 - 2 = 21 - 2 = 19$.

19 הוא מספר ראשוני שאינו מתחלק ב-3 וגם אינו מתחלק ב-5 - לכן הוא פוסל את תשובות (3) ו-(4).

נציב כעת $n = 4$: $(4 + 5) \cdot 3 - 2 = 9 \cdot 3 - 2 = 27 - 2 = 25$.

25 אינו ראשוני - לכן הוא פוסל את תשובה (2).

נותרה תשובה (1): המספר שהתקבל בהכרח אי-זוגי.

__דרך ב' - כללי זוגיות:__

n זוגי. נוסיף 5 (אי-זוגי): זוגי + אי-זוגי = אי-זוגי.

כפל באי-זוגי (3): אי-זוגי $\times$ אי-זוגי = אי-זוגי.

חיסור של 2 (זוגי): אי-זוגי - זוגי = אי-זוגי. התוצאה אי-זוגית בהכרח.

תשובה (1).

שאלה 2

השאלה:

בשק יש חפצים מכמה סוגים: 6 קוביות אדומות, 3 קוביות צהובות, 4 כדורים אדומים, ו-2 כדורים צהובים. אורלי מוציאה באקראי חפץ מהשק. מה הסיכוי שהחפץ יהיה צהוב?

פתרון:

__שיטת הפעולה:__

בשאלות הסתברות מחלקים את **מספר המקרים הרצויים** ב-**מספר המקרים האפשריים** (סך הכול).

__סך החפצים בשק (מקרים אפשריים):__

$6 + 3 + 4 + 2 = 15$ חפצים.

__מספר החפצים הצהובים (מקרים רצויים):__

3 קוביות צהובות $+$ 2 כדורים צהובים $= 5$ חפצים.

__חישוב ההסתברות:__

P(צהוב) $= \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

תשובה (3).

שאלה 3

השאלה:

טל גדולה מדניאלה ב-24 שנים. בעוד 8 שנים תהיה טל גדולה כפליים מדניאלה. בת כמה דניאלה כיום?

פתרון:

דרך א' - בדיקת תשובות:

נציב כל תשובה ונבדוק האם בעוד 8 שנים גילה של טל יהיה כפול מגיל דניאלה.

תשובה (4): דניאלה בת 16, טל בת $16 + 24 = 40$.

בעוד 8 שנים: דניאלה תהיה בת 24, טל תהיה בת 48.

$2 \cdot 24 = 48$ - אכן טל גדולה כפליים מדניאלה. תשובה (4) נכונה.

דרך ב' - בניית משוואה:

נסמן ב-D את גילה הנוכחי של דניאלה. גילה הנוכחי של טל: $D + 24$.

בעוד 8 שנים: גיל דניאלה $D + 8$, וגיל טל $D + 24 + 8 = D + 32$.

הנתון שטל תהיה אז כפליים מדניאלה: $D + 32 = 2(D + 8)$.

פתיחת סוגריים: $D + 32 = 2D + 16$.

העברת אגפים: $32 - 16 = 2D - D$, ולכן $D = 16$.

דניאלה בת 16 כיום.

תשובה (4).

שאלה 4

השאלה:

הממוצע של x, y ו-z **גדול** מ-8. הממוצע של x ו-y **קטן** מ-8. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון:

נתון ראשון:

הממוצע של שלושה ערכים גדול מ-8: $\frac{x+y+z}{3} > 8$, ולכן $x + y + z > 24$.

נתון שני:

הממוצע של שני ערכים קטן מ-8: $\frac{x+y}{2} < 8$, ולכן $x + y < 16$.

חיסור האי-שוויונים:

נחסר את האי-שוויון השני מן הראשון:

$z = (x + y + z) - (x + y)$.

$z > 24 - 16 = 8$.

דרך נוספת - אינטואיציה:

אם הממוצע של x ו-y קטן מ-8, ולאחר שצרפנו אליהם את z הממוצע של השלושה גדל ועבר את 8, חייב z להיות גדול מ-8 כדי "למשוך" את הממוצע למעלה.

מסקנה:

$z > 8$ בהכרח - תשובה (2).

תשובה (2).

שאלה 5

השאלה:
בסרטוט מעגל שמרכזו O. שלוש גזרות יוצרות אותו: גזרה כהה שזווית הראש שלה ישרה (90°); גזרה מקווקוות שזווית הראש שלה 4α; וגזרה שלישית שזווית הראש שלה 5α. מה היחס בין גודל השטח הכהה לגודל השטח המקווקו?

פתרון:

עיקרון:
יחס שטחי הגזרות במעגל זהה ליחס הזוויות המרכזיות היוצרות אותן.

סכום הזוויות במרכז:
סכום זוויות המרכז של שלוש הגזרות הוא 360°:
$90^\circ + 4\alpha + 5\alpha = 360^\circ$.
$9\alpha = 270^\circ$.
$\alpha = 30^\circ$.

הזוויות בפועל:
הגזרה הכהה: 90°.
הגזרה המקווקוות: $4\alpha = 120^\circ$.

היחס:
שטח כהה : שטח מקווקו
$= 90 : 120 = 3 : 4$.

תשובה (4).

שאלה 6

השאלה:
x ו-y הם שניים מהמספרים 2, 3, 4. נתון: $x < y$. איזו מהאפשרויות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון:

ניתוח המצב:
מאחר ש-$x < y$ ושני המספרים מתוך $\{2, 3, 4\}$:
x יכול להיות 2 או 3.
y יכול להיות 3 או 4.

הצבה ראשונה - $x = 2, y = 4$:
$x^y = 2^4 = 16$, ו-$y^x = 4^2 = 16$.
מתקבל שוויון $x^y = y^x$ - הצבה זו פוסלת את תשובות (1) ו-(2).

הצבה שנייה - $x = 2, y = 3$:
$x^y = 2^3 = 8$, ו-$y^x = 3^2 = 9$.
כעת $x^y \neq y^x$ - הצבה זו פוסלת את תשובה (3).

מסקנה:
אף אחת מן האפשרויות (1), (2), (3) אינה נכונה בהכרח - תשובה (4).

תשובה (4).

שאלה 7

השאלה:
שלושה עובדים המנקים בקצב קבוע ואחיד מסיימים את הניקיון ב-20 דקות. ארבעה עובדים המסדרים בקצב קבוע ואחיד מסיימים את הסידור בשעה אחת. כמה שעות יידרשו לשני עובדים לנקות את המכולת ומייד לאחר מכן לסדר בה את המדפים?

פתרון:

עבודת ניקיון:
אם 3 עובדים מסיימים את הניקיון ב-20 דקות, סך זמן העבודה הוא $3 \cdot 20 = 60$ דקות-עובד.
שני עובדים יסיימו את אותה כמות עבודה ב-$60 \div 2 = 30$ דקות (חצי שעה).

עבודת סידור:
אם 4 עובדים מסדרים את החנות בשעה אחת, סך זמן העבודה הוא $4 \cdot 1 = 4$ שעות-עובד.
שני עובדים יסיימו את אותה כמות עבודה ב-$4 \div 2 = 2$ שעות.

סך הזמן:
$\frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}$ שעות.

תשובה (3).

שאלה 8

השאלה:
בסרטוט טרפז $ABCD$ ($AD \parallel BC$). $AD = 6$ ס"מ, $BC = 8$ ס"מ. נתון: שטח המשולש ABC הוא x סמ"ר. מה שטח המשולש ABD (בסמ"ר)?

פתרון:

דרך א' - גובה הטרפז:
נסמן ב-h את המרחק בין הישרים המקבילים AD ו-BC. גובה זה משמש את שני המשולשים.
שטח משולש ABC (בסיס $BC = 8$, גובה h):
$S_{ABC} = \frac{8h}{2} = 4h = x$, ולכן $h = \frac{x}{4}$.
שטח משולש ABD (בסיס $AD = 6$, אותו גובה h):
$S_{ABD} = \frac{6h}{2} = 3h = 3 \cdot \frac{x}{4} = \frac{3}{4}x$.

דרך ב' - יחס בסיסים:
מאחר ששני המשולשים (ABC ו-ABD) חולקים את אותו גובה (המרחק בין הישרים המקבילים), היחס בין שטחיהם שווה ליחס בסיסיהם:
$\frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{AD}{BC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.
לכן $S_{ABD} = \frac{3}{4} \cdot S_{ABC} = \frac{3}{4}x$.

תשובה (3).

הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

שאלה 9

השאלה:
(לפי תרשים הג'אז שבפרק) משך קטעי הנגינה המאולתרים שניגן _____ בכל שלוש היצירות יחד היה שתי דקות וחצי.

פתרון:

הגיטריסט:
ביצירה א - חצי דקה (3-3.5).
ביצירה ב - חצי דקה (3.5-4).
ביצירה ג - שלוש דקות (0-3).
סך הכול: $4 = 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ דקות.

החצוצרן:
ביצירה ב - חצי דקה (3.5-4).
ביצירה ג - דקה אחת (2-3).
סך הכול: $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ דקות.

המתופף:
ביצירה א - חצי דקה (3-3.5).
ביצירה ב - חצי דקה (2-2.5).
ביצירה ג - שתי דקות (0-2).
סך הכול: $3 = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ דקות.

הפסנתרן:
ביצירה ב - חצי דקה (4-4.5).
ביצירה ג - שתי דקות (0-2).
סך הכול: $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$ דקות.

מסקנה:
הפסנתרן הוא היחיד שניגן בדיוק $2\frac{1}{2}$ דקות מאולתרות - תשובה (4).

תשובה (4).

שאלה 10

השאלה:
כמה מהנגנים ניגנו גם ביצירה א, גם ב-ב וגם ב-ג בנקודת הזמן שחלה $3\frac{1}{4}$ דקות לאחר תחילת היצירה?

פתרון:

בדיקה ברגע 3:15:
נבדוק עבור כל נגן אם הוא מנגן ברגע $3:15 = 3\frac{1}{4}$ בכל אחת משלוש היצירות.

הגיטריסט:
מנגן בכל שלוש היצירות ברגע 3:15.

החצוצרן:
אינו מנגן ביצירה ב ברגע 3:15 - נפסל.

המתופף:
מנגן בכל שלוש היצירות ברגע 3:15.

הפסנתרן:
ביצירות א ו-ב אינו מנגן ברגע 3:15. מנגן רק ביצירה ג - נפסל.

מסקנה:
שניים בלבד מנגנים בכל שלוש היצירות ברגע 3:15: הגיטריסט והמתופף - תשובה (2).

תשובה (2).

שאלה 11

השאלה:
במהלך אחת היצירות עזבה צופה בשם יעל את ההופעה ברגע שבו בדיוק שניים מהנגנים בלהקה אלתרו. לפיכך, לא ייתכן שיעל עזבה _____ דקות לאחר תחילתה של אותה היצירה.

פתרון:

רעיון:
אנו מחפשים זמן שבו **לא ייתכן** בשום יצירה שיש בדיוק שני נגנים מאלתרים.

בדיקת 1:05:
ביצירות א ו-ב אין כלל מאלתרים ברגע זה.
ביצירה ג ברגע 1:05 מאלתרים **שלושה** נגנים: הגיטריסט (קטע 0.5-3), החצוצרן והפסנתרן (קטע 0-2).
כלומר בשום יצירה אין בדיוק שניים מאלתרים ברגע 1:05. **לא ייתכן**.

בדיקת 2:35:
ביצירה ג: מאלתרים הגיטריסט (קטע 0.5-3) והחצוצרן (קטע 2-3) - בדיוק שניים. ייתכן.

מסקנה:
הזמן 1:05 הוא היחיד שבו לא ייתכן שיעל עזבה - תשובה (1).

תשובה (1).

שאלה 12

השאלה:
יצירה מסתיימת ברגע שבו מסתיים קטע הנגינה האחרון שבה. באילו מהיצירות ניגן הגיטריסט קטע נגינה מאולתר במהלך חצי הדקה האחרונה של היצירה?

פתרון:

איתור קטעי האלתור של הגיטריסט:
ביצירה א - הגיטריסט מאלתר חצי דקה בסיום היצירה (3-3.5).
ביצירה ב - הגיטריסט מאלתר חצי דקה (3.5-4).
ביצירה ג - הגיטריסט אינו מאלתר בסוף היצירה.

בדיקת יצירה א:
הקטע 3-3.5 הוא אכן חצי הדקה האחרונה של היצירה - הגיטריסט אכן מאלתר בה. **נכלל.**

בדיקת יצירה ב:
החצוצרן ממשיך לנגן עד 5 דקות, ולכן היצירה מסתיימת ברגע 5. חצי הדקה האחרונה היא 4.5-5 - הגיטריסט אינו מאלתר בה. **לא נכלל.**

מסקנה:
רק ביצירה א - תשובה (1).

תשובה (1).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13

השאלה:
בסרטוט מעגל שעובר בראשית הצירים ומרכזו בנקודה $M(-1,1)$. הנקודה $A(x,1)$ נמצאת על היקף המעגל. מה ערך x?

פתרון:

חישוב רדיוס המעגל:
מאחר שהמעגל עובר דרך הראשית $(0,0)$, הרדיוס הוא המרחק מ-$M(-1,1)$ אל הראשית.
נבנה משולש ישר-זווית שניצביו הם ערכי ה-x וה-y של M (אורך כל ניצב 1).
היתר של המשולש מחבר את M עם הראשית - הוא הרדיוס r.
(ניתן גם לראות זאת כאלכסון של ריבוע שצלעו 1.)
לפי משפט פיתגורס: $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

מציאת x:
ל-$M(-1,1)$ ול-$A(x,1)$ אותה קואורדינטת $y=1$.
לכן הקטע MA אופקי, ואורכו $|x-(-1)| = x+1$ (עבור $x > -1$).
כיוון ש-A על המעגל, MA הוא רדיוס: $x+1=\sqrt{2}$.
ומכאן $x = \sqrt{2}-1$ - תשובה (3).

תשובה (3).

שאלה 14

השאלה:
לאפרת, בני וגלעד היו סכומי כסף שווים זה לזה. אפרת נתנה לבני חצי מסכומה. אחר כך נתן בני לגלעד חצי מסכומו (החדש). לבסוף נתן גלעד לאפרת חצי מסכומו (החדש). למי הסכום הקטן ביותר?

פתרון:

הצבת ערך נוח:
נצא מ-8 שקלים לכל אחד (מספר שמתחלק בחצאים פעמיים).

שלב א - אפרת נותנת לבני:
אפרת נותנת 4 לבני. כעת: אפרת 4, בני 12, גלעד 8.

שלב ב - בני נותן לגלעד:
בני נותן 6 לגלעד. כעת: אפרת 4, בני 6, גלעד 14.

שלב ג - גלעד נותן לאפרת:
גלעד נותן 7 לאפרת. כעת: אפרת 11, בני 6, גלעד 7.

השוואה:
בני - 6 - הוא בעל הסכום הקטן ביותר.

תשובה (2).

שאלה 15

השאלה:
מהו המספר החיובי הקטן ביותר אשר 3% ממנו הם מספר שלם?

פתרון:

ניסוח:
מחפשים את x כך ש-$\frac{3x}{100}$ יהיה מספר שלם.
מאחר שמחפשים את הקטן ביותר, נבדוק את התשובות לפי סדר עולה - החל מן הקטנה ביותר.

בדיקת תשובה (1) - $12\frac{1}{2}$:
3% ממנו: $0.375 = \frac{37.5}{100} = \frac{3\cdot 12.5}{100}$ - לא שלם.

בדיקת תשובה (2) - 30:
3% ממנו: $0.9 = \frac{90}{100} = \frac{3\cdot 30}{100}$ - לא שלם.

בדיקת תשובה (3) - $33\frac{1}{3}$:
3% ממנו: $1 = \frac{100}{100} = \frac{3\cdot 33\frac{1}{3}}{100}$ - **שלם!**

מסקנה:
$33\frac{1}{3}$ הוא הקטן ביותר מבין התשובות שעבורו 3% ממנו מספר שלם - תשובה (3).

תשובה (3).

שאלה 16

השאלה:
בסרטוט ABC הוא משולש ישר-זווית, ו-$EBFD$ הוא ריבוע.
נתון: $BF = 2$ ס"מ.
$FC = x$ ס"מ.
מה אורכו של AE (בס"מ)?

פתרון:

צלעות הריבוע:
מאחר ש-$EBFD$ ריבוע ו-$BF = 2$:
$EB = FD = DE = BF = 2$.

משולשים דומים:
המשולש ADE דומה למשולש ACB (ז.ז.):
שניהם ישרי-זווית.
ושניהם חולקים את הזווית בקודקוד A.

יחס דמיון:
$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC}$.
מציבים $AB = AE + 2$, $BC = 2 + x$, $ED = 2$:
$\frac{AE}{AE+2} = \frac{2}{2+x}$.

פתרון המשוואה:
מכפלת אגפים: $AE(2+x) = 2(AE+2)$.
פתיחת סוגריים: $2\cdot AE + x\cdot AE = 2\cdot AE + 4$.
צמצום $2\cdot AE$: $x\cdot AE = 4$.

התוצאה:
$AE = \frac{4}{x}$ - תשובה (3).

תשובה (3).

שאלה 17

השאלה:
נתון:
$-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.
$x \neq 0$.
מהו טווח הערכים המדויק של x?

פתרון:

עיקרון:
$\frac{1}{x}$ קטן בערך מוחלט ככל ש-$|x|$ גדול יותר.

מקרה $x > 0$:
$0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.
היפוך הופך את האי-שוויון: $x > 2$.

מקרה $x < 0$:
$-\frac{1}{2} < \frac{1}{x} < 0$.
היפוך הופך את האי-שוויון: $x < -2$.

הדגמה עם דוגמאות:
עבור $x = 3$: $\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \approx 0.333$, ואכן $-\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.
עבור $x = -3$: $\frac{1}{x} = -\frac{1}{3} \approx -0.333$, ואכן $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$.

מסקנה:
$x > 2$ או $x < -2$ - תשובה (1).

תשובה (1).

שאלה 18

השאלה:
המרחק המינימלי שהעין מבחינה בין שתי נקודות הוא 0.1 מ"מ.
שני בניינים במציאות במרחק 5 מטרים.
מהו קנה המידה של המפה הקטנה ביותר שבה ניתן יהיה להבחין בין שני הבניינים?

פתרון:

ניסוח הדרישה:
כדי שהעין תבחין בין שני בניינים על המפה, המרחק ביניהם על המפה חייב להיות לפחות 0.1 מ"מ.
המפה ה**קטנה ביותר** שעדיין מאפשרת הבחנה היא זו שבה המרחק על המפה הוא בדיוק 0.1 מ"מ.

המרת יחידות:
במציאות המרחק הוא 5 מטר.
5 מטר $= 5{,}000$ מ"מ.

חישוב קנה המידה:
קנה מידה = מרחק על המפה חלקי המרחק במציאות (באותן יחידות).
$\frac{1}{50{,}000} = \frac{0.1}{5{,}000}$ (מ"מ חלקי מ"מ).

מסקנה:
קנה המידה הוא $1 : 50{,}000$ - תשובה (1).

תשובה (1).

שאלה 19

השאלה:
הפעולה $\$(n)$ מוגדרת כסכום הספרות של n.
נתון: a ו-b הם מספרים שלמים חיוביים.
טענה א: אם $a < b$ אז $\$(a) < \$(b)$.
טענה ב: $\$(a + b) = \$(a) + \$(b)$.

פתרון:

בדיקת טענה א:
ננסה למצוא דוגמה נגדית.
ניקח $a = 9$, $b = 10$ - אז $a < b$.
$\$(a)$=$\$(9)$=9.
$\$(b)$=$\$(10)$=1+0=1.
כאן $\$(a) > \$(b)$ - לכן טענה א **אינה נכונה** בהכרח.

בדיקת טענה ב:
ננסה למצוא דוגמה נגדית.
ניקח $a = 5$, $b = 5$.
$\$(a)$+$\$(b)$=5+5=10.
$\$(a + b)$=$\$(10)$=1+0=1.
כאן $\$(a + b) \neq \$(a)$+$\$(b)$ - לכן טענה ב **אינה נכונה** בהכרח.

מסקנה:
אף אחת מהטענות אינה נכונה בהכרח - תשובה (4).

תשובה (4).

שאלה 20

השאלה:
נפח קובייה ב גדול פי 2 מנפח קובייה א.
פי כמה גדול שטח הפנים של קובייה ב משטח הפנים של קובייה א?

פתרון:

סימון הצלעות:
נסמן ב-a את אורך צלע קובייה א, וב-b את אורך צלע קובייה ב.
נפח קובייה הוא צלע בחזקת שלוש: $V_a = a^3$, $V_b = b^3$.

שימוש בנתון על הנפחים:
נתון $V_b = 2V_a$, כלומר $b^3 = 2a^3$.
נוציא שורש שלישי משני האגפים:
$b = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$.
כלומר היחס בין הצלעות הוא $\frac{b}{a} = \sqrt[3]{2}$.

יחס שטחי הפנים:
שטח פנים של קובייה: 6 פעמים שטח פאה - $S_a = 6a^2$, $S_b = 6b^2$.
$\frac{S_b}{S_a} = \frac{6b^2}{6a^2} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2 = \sqrt[3]{2^2}$.

מסקנה:
שטח הפנים של קובייה ב גדול פי $\sqrt[3]{2^2}$ משטח הפנים של קובייה א - תשובה (2).

תשובה (2).