<u>חורף 2019 – שאלון 035382</u>

<u>אלגברה</u>

1. בתחילת השנה קנה סוחר חולצות ושילם בעבור כל אחת מהן את אותו הסכום. הוא שילם בעבור כל החולצות 2,040 שקלים סך הכול.

5 חולצות נפגמו ולכן מכר אותן הסוחר בהפסד של 10% לחולצה.

שאר החולצות נמכרו ברווח של 20% לחולצה. המוכר מכר את כל החולצות ב־ 2,412 שקלים סך הכול.

א. מצא את הסכום ששילם הסוחר בעבור כל חולצה.

הסוחר מצא במחסן עוד 15 חולצות שקנה בשנה שעברה, ומכר אותן ברווח של 10% לחולצה. (הסכום ששילם בעבור חולצה בשנה שעברה זהה לסכום ששילם בעבור חולצה בתחילת השנה.)

ב. (1) כמה שילם הסוחר בעבור כל החולצות שמכר?

(2) מה היה אחוז הרווח הכולל של הסוחר ממכירת כל החולצות?

פתרון:

א. נבנה טבלה ובה נייצג את מספר החולצות שהסוחר קנה ב-x, ואת המחיר לכל חולצה ב-y :

	מספר חולצות	מחיר חולצה	סה"כ מחיר מספר · מחיר
קנייה	x	y	$x\cdot y$
חולצות פגומות	5	$0.9y$	$4.5y$
שאר החולצות	$x-5$	$1.2y$	$1.2y\cdot(x-5)$

לפי הנתונים המוכר שילם בסך הכל 2,400 שקלים. נבנה משוואה ראשונה :

$$x\cdot y=2{,}040$$

כמו כן, נתון שהסוחר מכר את כל החולצות במחיר של 2,412 שקלים. נבנה משוואה שנייה :

$$4.5y+1.2y\cdot(x-5)=2{,}412$$

קיבלנו שתי משוואות עם שני נעלמים. נפתור את מערכת המשוואות :

$$\begin{cases} x\cdot y=2{,}040 \\ 4.5y+1.2y\cdot(x-5)=2{,}412 \end{cases}$$

ראשית, נפתח סוגריים במשוואה **השנייה**:

$$4.5y + 1.2y \cdot (x - 5) = 4.5y + 1.2yx - 6y$$

$$-1.5y + 1.2yx = 2{,}412$$

נציב את 2,400 במקום xy במשוואה השנייה:

$$-1.5y + 1.2 \cdot 2{,}040 = 2{,}412$$

$$-1.5y + 2{,}448 = 2{,}412 \quad /-2{,}448$$

$$-1.5y = -36 \quad /\div(-1.5)$$
$$y = 24$$

נציב $y = 24$ במשוואה הראשונה:

$$24 \cdot x = 2{,}040 \quad /\div 24$$
$$x = 85$$

תשובה:

הסוחר שילם 24 שקלים עבור כל חולצה

ב. (1) לפי הנתונים הסוחר מצא עוד 15 חולצות משנה שעברה ועבור כל אחת שילם 24 שקלים, לכן המחיר הכולל הוא:

$$24 \cdot 15 = 360$$

התבקשנו לחשב את המחיר הכולל של החולצות שמכר, כלומר את הסכום של החולצות שמכר בתחילת השנה יחד עם המחיר של החולצות שמצא:

$$360 + 2{,}040 = 2{,}400$$

תשובה:

הסוחר שילם עבור כל החולצות שקנה 2,400 שקלים

(2) בסעיף זה התבקשנו למצוא את אחוז הרווח לכן נמצא את מחירי הקנייה המכירה.

- **<u>מחיר המכירה</u>**

לפי נתוני השאלה, הסוחר מכר את כל החולצות במחסן ברווח של 10%. נחשב את מחיר חולצה בודדת:

$$\frac{110}{100}\cdot 24=26.4$$

נחשב את מחירן של 15 החולצות:

$$26.4\cdot 15=396$$

לפי הנתונים מחיר החולצות הכולל בתחילת שנה היה 2,412. נחשב את מחיר המכירה הכולל:

$$396+2{,}412=2{,}808$$

- **<u>מחיר הקנייה</u>**

לפי סעיף קודם מצאנו שהסוחר שילם עבור כל החולצות שקנה 2,400 שקלים.

נציב את הנתונים בנוסחת הרווח:

$$\text{רווח}=\text{קניה}-\text{מכירה}$$

$$2{,}808-2{,}400=408$$

כעת נמצא את אחוז הרווח:

$$\frac{408}{2400}\cdot 100=17$$

תשובה:

אחוז הרווח הכולל ממכירת כל החולצות הוא 17%

2. במשולש ABC בציור שלפניך נתון: $A(9,24)$ ו־ $B(1,0)$.

א. מצא את משוואת הישר AB.

הישר OE שמשוואתו היא $y=2x$ חותך את הצלעות AB ו־ AC בנקודות D ו־ E בהתאמה (O — ראשית הצירים).

ב. מצא את שיעורי הנקודה D.

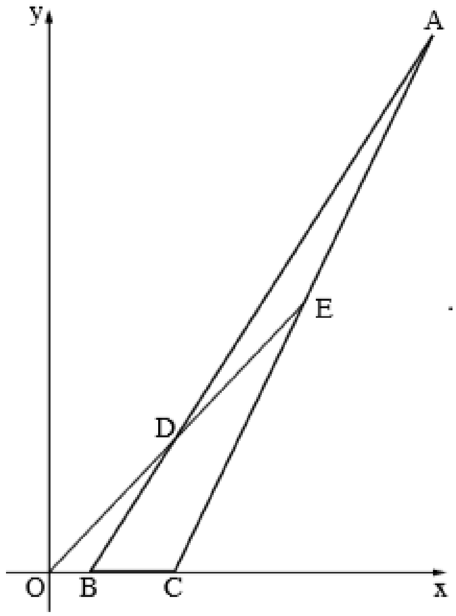
נתון: הקודקוד C מונח על ציר ה־ x והנקודה E היא אמצע הקטע AC.

ג. (1) מצא את שיעור ה־ y של הנקודה E.

(2) מצא את שיעור ה־ x של הנקודה E.

ד. (1) הסבר מדוע הישר DC מקביל לציר ה־ y.

(2) חשב את היקף המשולש BCD.



פתרון:

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את משוואת הישר AB. כדי למצוא משוואת ישר עלינו למצוא תחילה שיפוע ונקודה.

מציאת שיפוע:

לפי הנתונים $A(9,24)$ ו- $B(1,0)$.

נציב את שיעורי הנקודות בנוסחת השיפוע:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

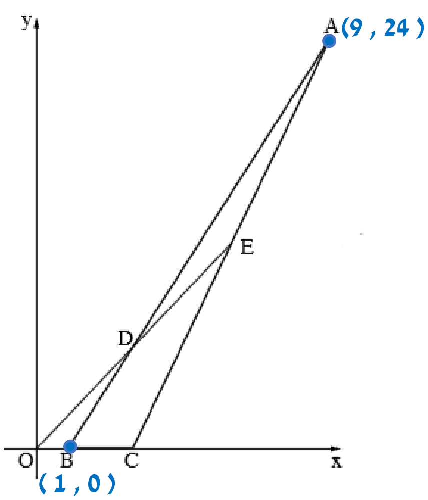
$$\frac{24-0}{9-1}=\frac{24}{8}=3$$

נבחר בנקודה $B(1,0)$ ונציב את שיעוריה בנוסחת הקו הישר:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-0=3(x-1)$$

$$y=3x-3$$



תשובה:

משוואת הישר AB היא $y=3x-3$

ב. לפי הנתונים משוואת הישר OE היא $y = 2x$. נשווה בין משוואה זו לבין המשוואה של הישר שמצאנו בסעיף קודם ונמצא את נקודה D שהיא נקודת החיתוך ביניהם:

$$y = 3x - 3 \text{ ß } BA$$

$$y = 2x \text{ ß } OD$$

$$2x = 3x - 3$$

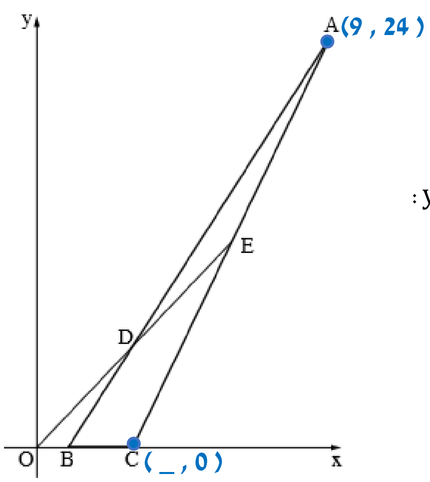
$$x = 3$$

נציב את שיעורי ה-x במשוואה (2):

$$y = 2 \cdot 3 = 6$$

תשובה:

שיעורי הנקודה D הם D(3 , 6)



ג. (1) לפי הנתונים הנקודה E היא אמצע הקטע CA. נעזר בנוסחת אמצע קטע ונחשב את y_A:

**שימו לב שאיננו יודעים מהו שיעור ה-x של נקודה C, אולם הוא אינו נחוץ בסעיף זה.

$$\frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0 + 24}{2} = 12$$

תשובה:

שיעור ה-y של הנקודה E הוא 12

(2) הנקודה E נמצאת על הישר OE שמשוואתו נתונה לנו.
נציב את שיעור ה-y שמצאנו בסעיף קודם במשוואת הישר:

$$12 = 2x \quad / \div 2$$

$$6 = x$$

תשובה:

שיעור ה-x של הנקודה E הוא 6

ד. (1) ישר המקביל לציר ה-y הוא ישר ששיעורי ה-x של הנקודות שנמצאות עליו זהות. בסעיף ב' מצאנו: $D(3, 6)$.

כעת נמצא את שיעורי נקודה C. נעזר בנוסחת קטע אמצעים, שכן ידוע שהנקודה E היא אמצע הקטע CA (כפי שעשינו בסעיף **ג (1)**):

$$\frac{x_A + x_C}{2} = x_E$$

$$\frac{x+9}{2} = 6 \quad /\cdot 2$$

$$x + 9 = 12 \quad /-9$$

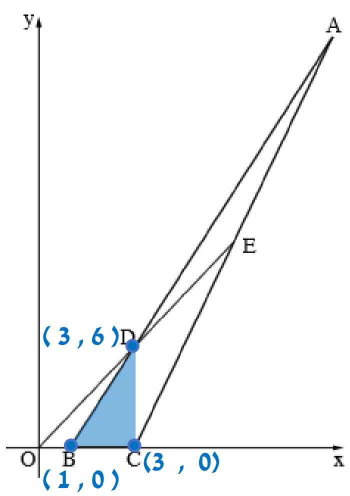
$$x = 3$$

לשתי הנקודות שמצאנו שיעור x זהה, ולכן הישר מקביל לציר ה-y.

תשובה:

הנקודות $D(3, 6)$ ו-$C(3, 0)$ הן בעלות אותו שיעור x, ולכן הן נמצאות על גבי ישר המקביל לציר ה-y

(2) בסעיף זה התבקשנו לחשב את היקף משולש BCD, כלומר עלינו לחשב את סכום צלעותיו.



$$DC = y_D - y_C = 6$$

$$BC = x_C - x_B = 2$$

נעזר בנוסחת הדיסטנס ונמצא את אורך BD:

$$BD = \sqrt{(x_D - x_B)^2 + (y_D - y_B)^2}$$

$$\sqrt{(3-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{4+36}$$

$$\sqrt{40} = 6.325$$

כעת נחשב את סכום שלוש הצלעות:

$$P_{BDC} = DC + CB + BD$$

$$6 + 2 + 6.325 = 14.325$$

תשובה:

היקף המשולש הוא 14.325 יחידות

3. נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו היא: $(x-4)^2+(y-3)^2=10$.

הנקודות A ו־ B הן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה־ x, כמתואר בציור שלפניך.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B.

הנקודה D נמצאת על המעגל כך ש־ AD הוא קוטר במעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודה D.

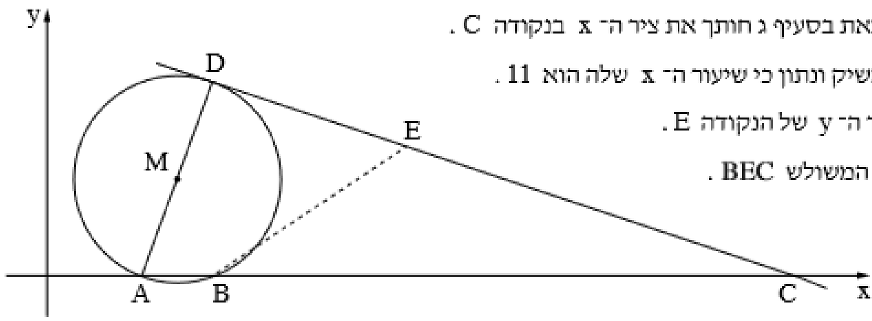
ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף ג חותך את ציר ה־ x בנקודה C.

הנקודה E נמצאת על המשיק ונתון כי שיעור ה־ x שלה הוא 11.

ד. (1) מצא את שיעור ה־ y של הנקודה E.

(2) חשב את שטח המשולש BEC.



פתרון:

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את שיעורי הנקודות A ו-B שהן נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-x.

נציב $y=0$:

$$(x-4)^2+(0-3)^2=10$$

$$(x-4)^2+9=10$$

$$(x-4)^2+9=10 \quad /-10$$

$$(x-4)^2-1=0$$

$$x^2-8x+16-1=0$$

$$x^2-8x+15=0$$

a = 1 b = -8 c = 15

נציב את הנתונים בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2}=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot1\cdot15}}{2\cdot1}$$

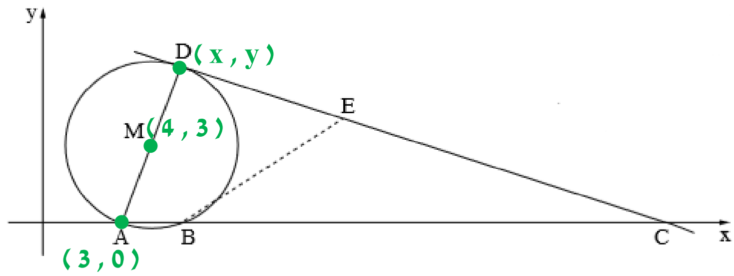
$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm2}{2}$$

$$x_1=\frac{8+2}{2}=5 \qquad x_2=\frac{8-2}{2}=3$$

תשובה:

שיעורי הנקודות A ו-B הם A(3 , 0) , B(5 , 0)

ב. לפי הנתונים מרכז המעגל היא הנקודה M ששיעוריה (4,3). נקודה M גם נמצאת על גבי הקוטר AD והיא מחלקת אותו לשני חלקים שווים (רדיוסים).



ניעזר בנוסחת אמצע קטע ונמצא את שיעורי הנקודה:

$$x_M = \frac{x_A + x_D}{2}$$

$$4 = \frac{3 + x_D}{2} \quad / \cdot 2$$

$$8 = 3 + x_D \quad / -3$$

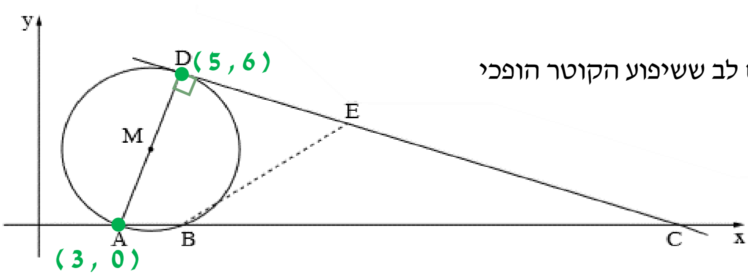
$$x_D = 5$$

$$3 = \frac{y_D + 0}{2} \quad / \cdot 2$$

$$y_D = 6$$

תשובה:

שיעורי הנקודה D הם D (5 , 6)



ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את משוואת המשיק בנקודה D. נשים לב ששיפוע הקוטר הופכי ומאונך לשיפוע המשיק, ולכן נחשב תחילה את שיפוע הקוטר:

$$m_{AD} = \frac{0-6}{3-5} = \frac{-6}{-2} = 3$$

כעת נחשב את שיפוע המשיק בנקודה D:

$$m_{DC} \cdot m_{AD} = -1$$

$$m_{DC} \cdot 3 = -1 \quad / \div 3$$

$$m_{DC} = -\frac{1}{3}$$

נציב את השיפוע שמצאנו ואת הנקודה הידועה D בנוסחת משוואת קו ישר:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 5)$$

$$y - 6 = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad / +6$$

$$y = -\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$$

תשובה:

משוואת המשיק בנקודה D היא $y = -\frac{1}{3}x + 7\frac{2}{3}$

ד. (1) נציב $x=11$ במשוואה שמצאנו בסעיף הקודם:

$$y=-\frac{1}{3}\cdot 11+7\frac{2}{3}=4$$

תשובה:

שיעור ה-y של הנקודה E הוא 4

(2) בסעיף זה התבקשנו לחשב את שטח משולש BEC. נמצא תחילה את שיעורי נקודה C.

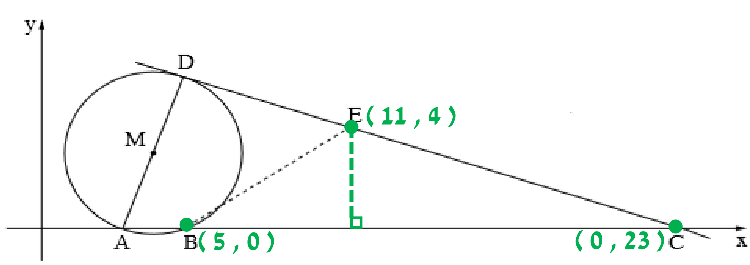
נקודה C נמצאת על ציר ה- x ולכן נציב $y=0$ במשוואת המשיק:

$$0=-\frac{1}{3}x+7\frac{2}{3}\quad /+\frac{1}{3}x$$
$$\frac{1}{3}x=7\frac{2}{3}\quad /\div\frac{1}{3}$$
$$x=23$$

שיעורי נקודה C: (0, 23)

נמתח גובה מקודקוד E לצלע BC, ונוכל לראות שהוא מקביל לציר ה-y. מכאן אורכו שווה לשיעור ה-y של נקודה E.

נחשב את נוסחת שטח המשולש:



תשובה:

שטח המשולש EBC הוא 36 יח"ר

<u>חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי</u>

4. נתונה הפונקציה $f(x)=12\sqrt{x}-3x$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ y .

ג. מצא את שיעורי נקודת הקיצון הפנימית של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגה.

ד. רשום את תחום העלייה ואת תחום הירידה של הפונקציה $f(x)$.

פתרון:

א. בסעיף זה התבקשנו למצוא את תחום ההגדרה של הפונקציה:

$$0 \le \sqrt{x} \quad /^2$$

$$0 \le x$$

תשובה:

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $x \ge 0$

ב. בסעיף זה עלינו למצוא את שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y ולכן נציב $x=0$ במשוואת הגרף:

$$f(0)=12\sqrt{0}-3\cdot 0=0$$

תשובה:

שיעורי נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y: (0 , 0)

ג. בסעיף זה התבקשנו לחשב את נקודות הקיצון הפנימיות של הפונקציה, לכן ראשית כל נגזור את משוואת הפונקציה:

$$f(x)=12\sqrt{x}-3x$$

$$f'(x)=\frac{12}{2\sqrt{x}}-3$$

כעת נשווה את הנגזרת ל-0, מפני שבנקודת הקיצון שיפוע הגרף שווה ל-0:

$$f'(x)=0$$

$$0=\frac{12}{2\sqrt{x}}-3$$

$$3=\frac{12}{2\sqrt{x}} \quad /\cdot 2\sqrt{x}$$

$$6\sqrt{x}=12 \quad /\div 6$$

$$\sqrt{x}=2 \quad /\cdot x^2$$

$$x=4$$

נציב $x = 4$ במשוואת הפונקציה ונקבל את שיעורי ה-y של נקודת הקיצון:

$$f(4) = 12\sqrt{4} - 3 \cdot 4$$

$$f(4) = 12 \cdot 2 - 3 \cdot 4 = 12$$

שיעורי נקודת הקיצון: (4 , 12).

נקבע את סוג נקודת הקיצון באמצעות טבלה, והצבה של ערכי x משני צידי הנקודה בנגזרת הפונקציה: $f'(x) = \frac{12}{2\sqrt{x}} - 3$

x	$x = 0$	$x = 1$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	MAX	↘

$$f'(1) = \frac{12}{2\sqrt{1}} - 3 = 3 \quad \text{à} \quad f'(1) > 0$$

$$f'(5) = \frac{12}{2\sqrt{5}} - 3 = -0.31 \quad \text{à} \quad f'(5) < 0$$

תשובה:

נקודת הקיצון (4 , 12) היא נקודת מקסימום של הפונקציה

ד. בסעיף זה התבקשנו לחשב את תחומי העלייה והירידה. ניעזר בטבלה בסעיף קודם:

תחומי עלייה: עד לנקודת המקסימום ובתוך תחום ההגדרה של הפונקציה ← $0 < x < 4$

תחומי ירידה: החל מנקודת המקסימום ובתוך תחום ההגדרה של הפונקציה ← $4 < x$

תשובה:

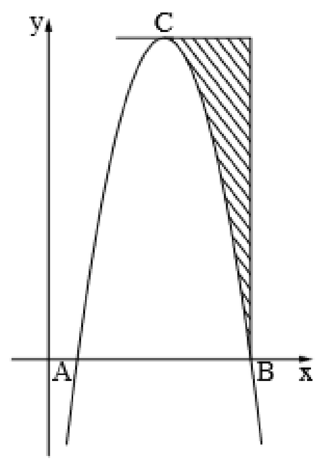
תחומי העלייה של הפונקציה: $0 < x < 4$
תחומי הירידה של הפונקציה: $4 < x$

5. נתונה הפונקציה $f(x) = -2x^2 + 16x - 14$.

הנקודות A ו־ B הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם ציר ה־ x ,

כמתואר בציור שלפניך.

הנקודה C היא נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.



א. מצא את שיעורי הנקודות A ו־ B .

ב. מצא את שיעורי הנקודה C .

העבירו משיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה C .

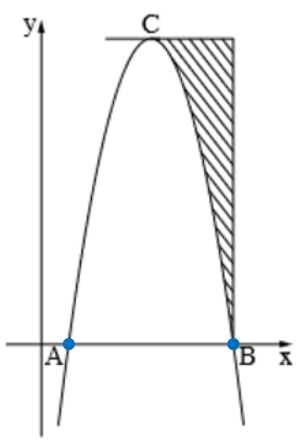
ג. מצא את משוואת המשיק.

מן הנקודה B העבירו אנך לציר ה־ x .

ד. חשב את השטח המקווקו שבציור:

השטח שבין גרף הפונקציה $f(x)$, המשיק והאנך.

פתרון:



א. בסעיף זה התבקשנו לחשב את שיעורי הנקודות A,B. נשים לב שנקודות אלה הן נקודות החיתוך עם ציר ה-x ולכן נציב במשוואת הפונקציה y=0 :

$$-2x^2 + 16x - 14 = 0$$

a = -2 b = 16 c = -14

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{(16)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-14)}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 12}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-16 + 12}{-4} = 1 \qquad x_2 = \frac{-16 - 12}{-4} = 7$$

תשובה:

שיעורי הנקודות A, B : A(1 , 0) , B(7 , 0)

ב. לפי הנתונים נקודת הקיצון של הפונקציה היא C.

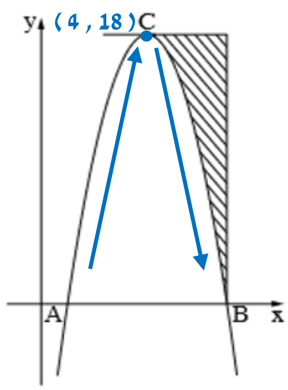
נגזור את הפונקציה ולאחר מכן נשווה אותה ל-0, שכן בנקודת הקיצון שיפוע הפונקציה הוא אפסי:

$$f(x) = -2x^2 + 16x - 14$$

$$f'(x) = -4x + 16$$

$$0 = -4x + 16 \quad /+4x$$

$$4x = 16 \quad /\div 4$$
$$x = 4$$



נציב $x = 4$ במשוואת הפונקציה ונקבל את שיעורי ה-y של הנקודה:

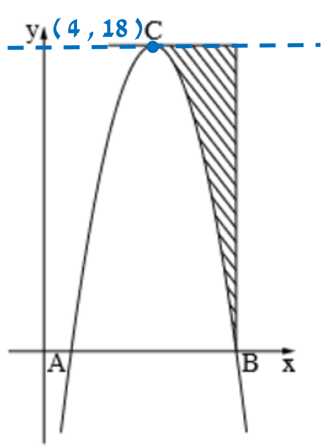
$$f(4) = -2 \cdot (4)^2 + 16 \cdot 4 - 14 = 18$$

מצאנו ששיעורי נקודת הקיצון C: (4,18). לפי הגרף נוכל לראות שנקודת C היא נקודת קיצון מסוג מקסימום.

תשובה:

שיעורי נקודת הקיצון מסוג מקסימום C הם $C(4\,,18)$

ג. העבירו משיק בנקודת הקיצון C.



שיפועו של המשיק בנקודת קיצון הוא 0 והוא מקביל לציר ה-x, ולכן משוואתו תהיה שווה לשיעור ה-y שלו, ולשיעור ה-y של נקודה C:

$$y = y_C = 18$$

תשובה:

משוואת המשיק היא $y = 18$

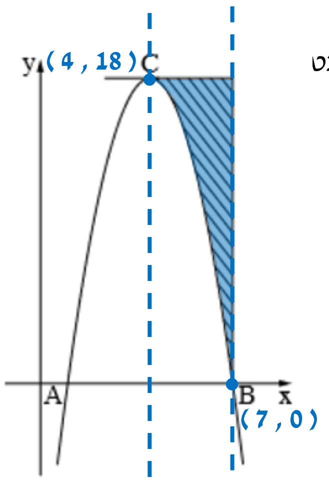
ד. נחשב את הפרש הפונקציות:

פונקציה עליונה = המשיק בנקודת הקיצון ← $y = 18$

פונקציה תחתונה ← $f(x) = -2x^2 + 16x - 14$

הפרש (עליונה – תחתונה) ← $y - f(x) = 18 - (-2x^2 + 16x - 14)$

$$18 + 2x^2 - 16x + 14 \;=\; 2x^2 - 16x + 32$$



נקודת ההשקה C והאנך היוצא מנקודה B תוחמים את שטח הרצוי, ולכן נשתמש בהם בחישוב האינט

$$\int_4^7 [-2x^2 + 16x - 14]dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{16x^2}{2} + 32x\right]_4^7$$

$$\left(\frac{2 \cdot 7^3}{3} - \frac{16 \cdot 7^2}{2} + 32 \cdot 7\right) - \left(\frac{2 \cdot 4^3}{3} - \frac{16 \cdot 4^2}{2} + 32 \cdot 4\right) =$$

$$60\frac{2}{3} - 42\frac{2}{3} = 18$$

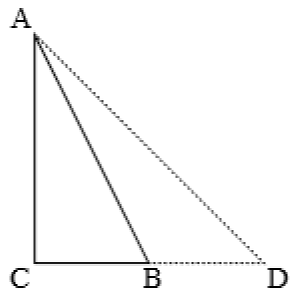
תשובה:

השטח הוא 18 יח״ר

6. משולש ABC הוא ישר־זווית $(\sphericalangle C = 90^o)$.
נתון כי שטח המשולש ABC הוא 16.
נסמן את אורך הצלע CB ב־ x.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע AC.
האריכו את הצלע CB ב־ x, כך שנוצר משולש חדש, ACD,
כמתואר בציור שלפניך.

ב. מצא את הערך של x שעבורו **סכום הניצבים** AC ו־ CD במשולש החדש ACD הוא מינימלי.

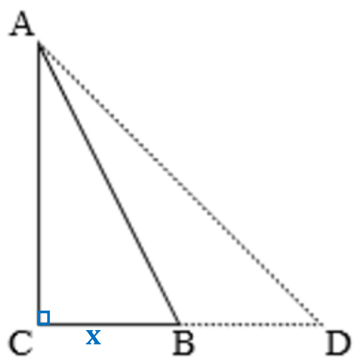


פתרון:

א. לפי הנתונים שטח המשולש הוא 16. כמו כן סימנו $CB = x$.

ניעזר בנוסחת שטח משולש ונחלץ את אורך הצלע AC:

$$\frac{CB \cdot AC}{2} = S_{ABC}$$
$$\frac{x \cdot AC}{2} = 16 \quad / \cdot 2$$
$$x \cdot AC = 32 \quad / \div x$$
$$AC = \frac{32}{x}$$



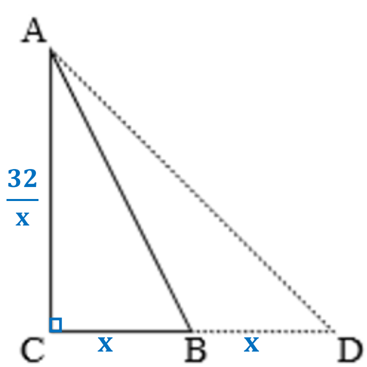
תשובה:

מצאנו שאת הצלע AC ניתן להביע באופן הבא: $AC = \frac{32}{x}$

ב. בסעיף זה התבקשנו לחשב את ערך ה-x עבורו סכום הניצבים CD ו- AC מינימאלי.
סכום הניצבים הוא:

$$f(x) = \frac{32}{x} + 2x$$

כדי למצוא את ערך ה- x שייתן סכום הניצבים **מינימלי**, נגזור את הפונקציה שקיבלנו ולאחר מכן נשווה את הנגזרת ל-0. באופן זה נוכל למצוא נקודות קיצון:



$$f'(x) = -\frac{32}{x^2} + 2$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = -\frac{32}{x^2} + 2 \quad / + \frac{32}{x^2}$$

$$\frac{32}{x^2} = 2 \quad / \cdot x^2$$

$$32 = 2 \cdot x^2 \quad / \div 2$$

$$16 = x^2$$

$$x = 4 \qquad\qquad x = -4$$

אורך הצלע x לא יכול להיות מספר שלילי ולכן $x = 4$.

נבדוק שנקודת הקיצון שקיבלנו היא מינימום בעזרת יצירת טבלה והצבה של ערכי x בנגזרת:

$$f'(x) = -\frac{32}{x^2} + 2$$

x	$x = 0$	$x = 1$	$x = 4$	$x = 5$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	MIN	↗

$$f'(5) = -\frac{32}{5^2} + 2 = \frac{18}{25} \quad \text{à} \quad 0 < f'(5)$$

$$f'(1) = -\frac{32}{1^2} + 2 = -30 \quad \text{à} \quad f'(1) < 0$$

לפי הטבלה הנקודה היא $x = 4$ נקודת מינימום, ומכאן שזהו האורך עבורו סכום הניצבים במשולש הוא מינימלי.

תשובה:

עבור הערך $x = 4$ סכום הניצבים במשולש ACD הוא מינימלי