

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(4)	(4)	(1)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(2)	(1)	(2)	(4)	(4)	(4)	(1)	(4)	(4)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1

השאלה:

OABC הוא מלבן כאשר O בראשית הצירים ו- $C(0, 6)$. מעגל משיק לצלעות CB ו-AB בנקודות E ו-D בהתאמה. נתון כי $D(5, 5)$. מצא את CE.

פתרון:

שלב 1: זיהוי מידות המלבן

מאחר ש-C נמצאת ב- $C(0, 6)$ ו-O בראשית הצירים, הצלע האנכית OC באורך 6, כלומר הצלע העליונה CB נמצאת בגובה $y = 6$.

שלב 2: מציאת מיקום הצלע AB

D היא נקודת ההשקה של המעגל עם הצלע AB. מכיוון ש-D נמצאת בנקודה $D(5, 5)$, וצלע AB היא צלע אנכית של המלבן, הרי שהצלע AB נמצאת על הישר $x = 5$.

לכן אורך הצלע האופקית של המלבן הוא 5, וכן נקודה B עצמה נמצאת ב- $(5, 6)$.

עיקרון מפתח: הרדיוס של מעגל משיק לישר יוצר ניצב לישר בנקודת ההשקה. לכן מרכז המעגל נמצא במרחק r (הרדיוס) מכל אחת משתי הצלעות שהמעגל משיק להן.

שלב 3: מציאת מרכז המעגל ורדיוסו

נסמן את מרכז המעגל ב-F ואת הרדיוס ב- r .

מכיוון שהמעגל משיק לצלע AB (שנמצאת על הישר $x = 5$), הרי שקואורדינטת ה-x של מרכז המעגל היא: $x_F = 5 - r$

מכיוון שהמעגל משיק לצלע CB (שנמצאת על הישר $y = 6$), הרי שקואורדינטת ה-y של מרכז המעגל היא: $y_F = 6 - r$

שלב 4: חישוב הרדיוס

נקודת ההשקה D נמצאת ב- $D(5, 5)$ על הצלע AB.

מכיוון שהרדיוס ניצב לישר ההשקה, מרכז המעגל נמצא ישירות משמאל לנקודה D.

לכן קואורדינטת ה-y של מרכז המעגל שווה לקואורדינטת ה-y של D, כלומר: $y_F = 5$

מכיוון ש- $y_F = 6 - r$, הרי שמתקיים: $5 = 6 - r$, ולכן $r = 1$.

מכאן שמרכז המעגל הוא: $F = (4, 5)$

שלב 5: מציאת נקודת ההשקה E

נקודת ההשקה E נמצאת על הצלע העליונה CB, ישירות מעל מרכז המעגל.

מכיוון שמרכז המעגל ב- $F = (4, 5)$ והצלע העליונה ב- $y = 6$, נקבל: $E = (4, 6)$

שלב 6: חישוב CE

נקודה C ב- $C(0, 6)$, נקודה E ב- $E = (4, 6)$.

שתי הנקודות באותו גובה y, לכן המרחק הוא ההפרש בקואורדינטות x:

$$CE = 4 - 0 = 4$$

תשובה (4)



שאלה 2

השאלה:

$$|x - y| - |y - x| = ?$$

פתרון:

תכונה חשובה של ערך מוחלט: לכל ביטוי a מתקיים $|a| = |-a|$

שלב 1: זיהוי הקשר בין הביטויים

הביטויים $(x - y)$ ו- $(y - x)$ הם נגדיים זה לזה (סכומם אפס).

לכן על פי התכונה לעיל:

$$|y - x| = |-(x - y)| = |x - y|$$

שלב 2: חישוב הביטוי

נציב בביטוי המקורי:

$$|x - y| - |y - x| = |x - y| - |x - y| = 0$$

תשובה (4)

שאלה 3

השאלה:

מחירה של שמלה עלה ביום שני ב-100% לעומת מחירה ביום ראשון. ביום שלישי הוא עלה ב-50% לעומת מחירה ביום שני, וביום רביעי הוא עלה ב-25% לעומת מחירה ביום שלישי. בכמה אחוזים עלה מחיר השמלה ביום רביעי לעומת יום ראשון?

פתרון:

טיפ: נבחר מחיר התחלתי נוח לחישוב. נסמן את מחיר השמלה ביום ראשון ב-100.

יום שני: עלייה של 100% משמעה שהמחיר הוכפל ($\times 2$):

$$100 \times 2 = 200$$

יום שלישי: עלייה של 50% משמעה הכפלה ב-1.5 ($\times 1.5$):

$$200 \times 1.5 = 300$$

יום רביעי: עלייה של 25% משמעה הכפלה ב-1.25 ($\times 1.25$):

$$300 \times 1.25 = 375$$

חישוב אחוז העלייה הכולל:

המחיר עלה מ-100 ל-375, כלומר עלייה של:

$$375 - 100 = 275$$

אחוז העלייה הוא:

$$\frac{275}{100} \times 100\% = 275\%$$

תשובה (4)



שאלה 4 - נפחים

השאלה:

- הכיסא שבסרטוט מורכב מהחלקים הבאים:
 4 - רגלי עץ שמידותיהן $1 \times 1 \times 50$ ס"מ
 2 - לוחות עץ שמידותיהם $1 \times 50 \times 50$ ס"מ

מה נפח העץ שבכיסא (בסמ"ק)?

פתרון:

נפח תיבה (מנסרה ישרה): אורך $\times$ רוחב $\times$ גובה

חישוב נפח הרגליים:

כל רגל היא תיבה עם מידות $1 \times 1 \times 50$ ס"מ.

נפח רגל אחת: $1 \times 1 \times 50 = 50$ סמ"ק

נפח 4 רגליים: $4 \times 50 = 200$ סמ"ק

חישוב נפח הלוחות:

כל לוח הוא תיבה עם מידות $1 \times 50 \times 50$ ס"מ.

נפח לוח אחד: $1 \times 50 \times 50 = 2,500$ סמ"ק

נפח 2 לוחות: $2 \times 2,500 = 5,000$ סמ"ק

סך הכל:

$200 + 5,000 = 5,200$ סמ"ק

תשובה (1)

שאלה 5 - הספק

השאלה:

- 3 משאבות הפועלות באותו קצב קבוע שואבות יחד 5 ליטרים מים בשעה.
 בכמה שעות ישאבו 2 משאבות יחד 20 ליטרים מים?

פתרון:

שלב 1: מציאת ההספק של 2 משאבות

אם 3 משאבות שואבות 5 ליטרים בשעה, אז משאבה אחת שואבת שליש מכך באותו זמן, כלומר $\frac{5}{3}$ ליטר בשעה.

2 משאבות ישאבו פי 2 ממשאבה אחת באותו זמן, ולכן ישאבו $2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$ ליטרים בשעה.

שלב 2: בניית טבלת יחסים

מצאנו את ההספק של 2 משאבות, כלומר מצאנו את הקשר בין זמן לעבודה. כעת נוכל להיעזר בריבוע יחסים על מנת לחשב את התשובה:

שעות	ליטרים
1	$\frac{10}{3}$
?	20

שלב 3: חישוב באמצעות מכפלות אלכסוניות

נכפול באלכסון את 1 ואת 20 ונחלק ב- $\frac{10}{3}$:

$$20 \times \frac{3}{10} = 6 \text{ שעות}$$

תשובה (1)



שאלה 6 - פישוט ביטויים

השאלה:

נתון: $(a-1)(a^2+a+1) = b^3 - 1$
 $0 < a, b$

$a = ?$

פתרון:

שלב 1: פישוט צד שמאל של המשוואה

נפתח את הסוגריים:

$$\begin{aligned} & (a-1)(a^2+a+1) \\ & a \cdot a^2 + a \cdot a + a \cdot 1 - 1 \cdot a^2 - 1 \cdot a - 1 \cdot 1 \\ & a^3 + a^2 + a - a^2 - a - 1 \\ & a^3 - 1 \end{aligned}$$

שלב 2: המשוואה המפושטת

לכן המשוואה הופכת ל:

$$a^3 - 1 = b^3 - 1$$

נוסיף 1 לשני האגפים:

$$a^3 = b^3$$

שלב 3: מציאת a

מכיוון ש- $0 < a < b$, נוציא שורש שלישי משני האגפים:

$$a = b$$

תשובה (1)

שאלה 7 - צירופים

השאלה:

בכמה אפשרויות אפשר לסדר את ימות השבוע מחדש, כך שיום ראשון לא ייפול במקומו הרגיל?

פתרון:

דרך א' - ספירה ישירה (כלל הכפל)

נתחיל ביום ראשון החדש. הוא יכול להיות כל יום חוץ מיום ראשון המקורי, כלומר יש 6 אפשרויות ליום זה.

כעת נבדוק כמה אפשרויות יש ליום השני. משום שיום אחד כבר מוקם במקום הראשון, נותרו 6 ימים שיכולים ליפול במקום זה (כולל יום ראשון המקורי).

ביום השלישי נוכל למקם את הימים שעוד לא מוקמו, כלומר את כולם חוץ מהשניים הקודמים. מספר האפשרויות הוא 5.

נמשיך כך: מספר הימים האפשריים לבחירה יקטן ב-1, ולכן יהיה 4 ולאחר מכן 3 ולאחר מכן 2 ולבסוף לבחירת היום האחרון תישאר רק אפשרות אחת לבחירה.

כעת נוכל לכפול את מספרי האפשרויות ונקבל:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$$

ולכן סך הכל: $6 \cdot 6!$



דרך בי - הכל פחות המשלים

סך כל הסידורים האפשריים של 7 ימים הוא $7!$.

נחסיר את הסידורים שבהם יום ראשון כן נמצא במקום הראשון. אם יום ראשון קבוע במקום הראשון, נשאר לסדר 6 ימים ב-6! דרכים.

$$7! - 6! = 7 \cdot 6! - 6! = 6!(7 - 1) = 6 \cdot 6!$$

תשובה (2)

שאלה 8 - ממוצעים ונוסחאות כפל מקוצר

השאלה:

הממוצע של שני מספרים חיוביים x ו- y שווה להפרשם $(x < y)$.

הממוצע של x^2 ו- y^2 הוא 500.

$x = ?$

פתרון:

שלב 1: תרגום הנתון הראשון למשוואה

הממוצע של x ו- y שווה להפרשם:

$$\frac{x+y}{2} = x - y$$

נכפיל ב-2:

$$x + y = 2x - 2y$$

$$3y = x$$

$$y = \frac{x}{3} \text{ כלומר:}$$

שלב 2: תרגום הנתון השני למשוואה

$$\frac{x^2+y^2}{2} = 500$$

נכפיל ב-2:

$$x^2 + y^2 = 1000$$

שלב 3: הצבה ופתרון

$$\text{נציב } y = \frac{x}{3}$$

$$x^2 + \frac{x^2}{9} = 1000$$

$$\frac{9x^2+x^2}{9} = 1000$$

$$\frac{10x^2}{9} = 1000$$

נכפיל ב-9 ונחלק ב-10:

$$x^2 = 900$$

מכיוון ש- x חיובי:

$$x = 30$$

תשובה (3)

הסקה מטבלה (שאלות 9-12)

שאלה 9 - קריאת נתונים מטבלה

השאלה:

באיזה סוג משחק שיחקו רק פעם אחת ב-10 המשחקים האחרונים של הטורניר?

פתרון:

הבנת הטבלה: סוג המשחק מיוצג על ידי הצורה שבחלק העליון של כל משבצת. המשחקים נערכו לפי סדר השחקנים - מימין לשמאל בשורה העליונה, וזו ממשיכים לשורה הבאה מימין לשמאל, וכך הלאה. לכן 10 המשחקים האחרונים נמצאים ב-10 המשבצות התחתונות.

ספירת סוגי המשחקים ב-10 המשבצות התחתונות:

- ☆ (כוכבי הפלא) - מספר פעמים
- ♥ (לבבות וחרבות) - פעם אחת
- △ (מגדלים באוויר) - מספר פעמים
- (סיבוב מסוכן) - מספר פעמים

הצורה היחידה שמופיעה פעם אחת היא הלב (♥), המסמן את המשחק "לבבות וחרבות".

תשובה (2)

שאלה 10 - קריאת נתונים מטבלה

השאלה:

אילו היה משתתף בטורניר עוד שחקן - שחקן נ - כמה משחקים היו מתווספים לטורניר?

פתרון:

בטורניר משתתפים 9 שחקנים (A עד I), וכל שחקן משחק מול כל שחקן אחר בדיוק פעם אחת.

אם מוסיפים שחקן נ, עליו לשחק מול כל אחד מ-9 השחקנים הקיימים בדיוק פעם אחת.

לכן יתווספו 9 משחקים.

תשובה (2)

שאלה 11 - קריאת נתונים מטבלה

השאלה:

אחד השחקנים שיחק פעמיים ברצף ב"כוכבי הפלא". מה היה המשחק הבא ששיחק?

פתרון:

הבנת מבנה הטבלה: סדר המשחקים של כל שחקן הוא מלמעלה למטה ומימין לשמאל. המשחקים הראשונים של שחקן מופיעים בעמודה שלו (מלמעלה למטה), ולאחר מכן ממשיכים בשורה שלו (מימין לשמאל).

חיפוש שני משחקי ☆ רצופים:

נחפש עמודה שבה מופיעים שני כוכבים רצופים.

בעמודה C מופיעים שני משחקי "כוכבי הפלא" רצופים - המשחק של C עם A והמשחק של C עם B.

המשחק הבא של שחקן C:

המשחק הבא של C הוא עם שחקן D, כלומר המשחק הראשון בשורה של C. משחק זה מיוצג על ידי משולש (△), כלומר מדובר במשחק "מגדלים באוויר".

תשובה (3)

שאלה 12 - קריאת נתונים מטבלה

השאלה:

השחקן המפסיד מאבד מספר נקודות השווה לזה שבו זכה המנצח (והניקוד של שחקן יכול להיות שלילי). כמה נקודות צבר שחקן C סך הכול?

פתרון:

כלל הניקוד: החץ מצביע על המנצח. המנצח מקבל את הנקודות שבמשבצת, המפסיד מאבד אותן.

המשחקים בעמודה C (מול A ו-B):

החץ פונה ימינה, מה שמעיד כי C הפסיד לשני השחקנים מולם שיחק (A ו-B).

מול A: 2 - נקודות

מול B: 3 - נקודות

$$\text{סה"כ בעמודה: } -5 = -2 + (-3)$$

המשחקים בשורה C (מול D עד I):

מול D: מנצח, 2 + נקודות

מול E: מנצח, 5 + נקודות

מול F: מפסיד, 1 - נקודה

מול G: מפסיד, 5 - נקודות

מול H: מנצח, 1 + נקודה

מול I: מנצח, 3 + נקודות

$$\text{סה"כ בשורה: } 5 = 2 + 5 + (-1) + (-5) + 1 + 3$$

סיכום:

$$-5 + 5 = 0$$

תשובה (2)

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - מצולעים ומעגלים

השאלה:

לא ייתכן שאחד מאלכסוניו של _____ החסום במעגל הוא קוטר במעגל.

פתרון:

גישה: "מה לא ייתכן?" הוא רמז לבדיקת תשובות. ננסה להראות כי המצב המתואר בתשובה הוא אפשרי במטרה לפסול תשובות. נבדוק כל תשובה על ידי ציור הצורה החסומה במעגל ובדיקה האם אלכסונה יכול להיות גם קוטר המעגל החוסם.

תשובה (1): טרפי שווה-שוקיים

נצייר טרפי שווה-שוקיים חסום במעגל. אלכסון הטרפי הוא מיתר במעגל. על מנת שהמיתר יהיה קוטר, עליו להישען על זווית היקפית השווה ל- 90° . אולם אלכסון הטרפי נשען על זוויות הטרפי שווה-השוקיים שהן זוויות חדות מצד אחד או זוויות קהות מהצד השני. אם כך, אלכסון זה הוא בהכרח לא הקוטר.

לכן, תשובה (1) לא ייתכן - זו התשובה הנכונה.

תשובה (2): מלבן

נצייר מלבן החסום במעגל. אלכסון המלבן הוא מיתר במעגל. על מנת שהמיתר יהיה קוטר, עליו להישען על זווית היקפית השווה ל- 90° . ואכן, האלכסון נשען על זווית המלבן הישרות. ייתכן שאחד האלכסונים הוא קוטר במעגל החוסם את המלבן - **תשובה זו נפסלת**.

תשובה (3): משושה משוכלל

נצייר משושה משוכלל חסום במעגל. למשושה אלכסונים רבים. נוכל להיעזר במצב מוכר: נעביר רדיוסים ממרכז המעגל החוסם אל קודקודי המשושה, ונקבלו שישה משולשים שווים צלעות שצלעותיהם שוות לרדיוס. אם כך, האלכסון הגדול החותך את המשושה המשוכלל לשני רדיוסים, כלומר החלק הזה של הקוטר במעגל החוסם. ייתכן שאחד האלכסונים הוא קוטר במעגל החוסם את המשושה המשוכלל - **תשובה זו נפסלת**.

תשובה (4): מתומן משוכלל

נצייר מתומן משוכלל חסום במעגל. למתומן אלכסונים רבים. בשונה מהמשושה המשוכלל, כאן אין מצב מוכר להיעזר בו. אם כן נחפש ליצור זווית היקפית השווה ל- 90° , הנשענת על מיתר שהוא אלכסון במתומן. ייתכן שאחד האלכסונים הוא קוטר במעגל החוסם את המתומן המשוכלל - **תשובה זו נפסלת**.

תשובה (1)

שאלה 14 - בעיה מילולית

השאלה:

לרתי היו נחש ולטאה. לפני שנה היה אורך הנחש בדיוק פי 2 מאורך הלטאה. במהלך השנה התארך כל אחד מהם באותו מספר של ס"מ. כעת הנחש ארוך מהלטאה ב-36 ס"מ.

מה היה סכום האורכים של הנחש ושל הלטאה לפני שנה (בס"מ)?

פתרון:

שימו לב: בנתונים אין מספר התחלתי נוח לעבוד איתו, וגם המספרים שבתשובות לא נוחים לעבודה. זאת משום שאנו נשאלים על סכום של שני גורמים ולא על גורם ספציפי. בנוסף, בתשובות יש את האפשרות "אי אפשר לדעת לפי הנתונים". לכן, נעבור לעבודה עם משוואות.

הגדרת משתנים:

נסמן את אורך הלטאה לפני שנה ב- x ואת אורך הנחש לפני שנה ב- $2x$.
במהלך השנה התארך כל אחד מהם באותו מספר של ס"מ, נסמן אותו ב- y .

אורכו העדכני של הנחש יהיה $2x + y$ ואורכו העדכני של הלטאה יהיה $x + y$.

בניית משוואה:

נתון כי כעת הנחש ארוך מהלטאה ב-36 ס"מ, משמע נוכל להוסיף 36 לאורך הלטאה ולהשוות בין אורכיהם:

$$2x + y = x + y + 36$$

נסיר y ו- x משני האגפים ונקבל:

$$x = 36$$

חישוב סכום האורכים לפני שנה:

מצאנו כי אורך הלטאה לפני שנה היה 36 ס"מ, מכאן שאורך הנחש לפני שנה היה $2 \cdot 36 = 72$ ס"מ.

נתבקשנו למצוא את סכום אורכיהם לפני שנה:

$$108 = 72 + 36 \text{ ס"מ}$$

תשובה (2)

שאלה 15 - בעיה מילולית

השאלה:

האותיות A ו-B מייצגות ספרות בין 1 ל-9.
AB הוא מספר דו-ספרתי הקטן מפעמיים סכום ספרותיו.

$$\frac{B}{A} = ?$$

פתרון:

גישה: משום שטווח האפשרויות לספרות הוא מצומצם (מ-1 עד 9), נוכל לבדוק האם המספרים שבתשובות יכולים לקיים את היחס עליו נשאלנו.

$$\frac{B}{A} = 7 \text{ : (1) תשובה}$$

היחס בין הספרות הוא 7:1, וזה אפשרי רק כאשר B שווה ל-7 ו-A שווה ל-1.
נבדוק: המספר הדו-ספרתי AB יהיה שווה ל-17.

$$1 + 7 = 8, \text{ פעמיים סכום ספרותיו: } 2 \cdot 8 = 16.$$

המספר 17 אינו קטן מ-16. **נפסלת.**

$$\frac{B}{A} = \frac{3}{2} \text{ : (2) תשובה}$$

היחס בין הספרות הוא 3:2, וזה אפשרי כאשר B=3, A=2 או B=6, A=4 או B=9, A=6.
נבדוק את המקרה הראשון: המספר 23.

$$2 + 3 = 5, \text{ פעמיים סכום ספרותיו: } 2 \cdot 5 = 10.$$

המספר 23 אינו קטן מ-10. גם שאר המקרים לא מקיימים את התנאי. **נפסלת.**

$$\frac{B}{A} = \frac{8}{3} \text{ : (3) תשובה}$$

היחס בין הספרות הוא 8:3, וזה אפשרי רק כאשר B=8 ו-A=3.
נבדוק: המספר 38.

$$3 + 8 = 11, \text{ פעמיים סכום ספרותיו: } 2 \cdot 11 = 22.$$

המספר 38 אינו קטן מ-22. **נפסלת.**

$$\frac{B}{A} = 9 \text{ : (4) תשובה}$$

היחס בין הספרות הוא 9:1, וזה אפשרי רק כאשר B=9 ו-A=1.
נבדוק: המספר הדו-ספרתי AB יהיה שווה ל-19.

$$1 + 9 = 10, \text{ פעמיים סכום ספרותיו: } 2 \cdot 10 = 20.$$

המספר 19 קטן מ-20 ($19 < 20$). **התשובה מתאימה לנתונים.**

תשובה (4)



שאלה 16 - חזקות

השאלה:

שלושה מארבעת הביטויים הבאים שווים בערכם. מהו הביטוי הנותר?

פתרון:

גישה: בתשובות ביטויים ובהם חזקות בעלות בסיסים שונים. על מנת להשוות בין חזקות, נוח להביא את הביטויים לבסיסים שווים. משום שאנו משווים בין הביטויים שבתשובות, נתחיל מהביטויים הכוללים מספרים שלמים ומעריכים חיוביים, כלומר נתחיל מהביטויים שבתשובות (3) ו-(4).

תשובה (3): 8^3

$$\text{נמיר את } 8 \text{ ל-} 2^3 = 8 \text{ ונקבל: } (2^3)^3 = 2^9$$

תשובה (4): 4^6

$$\text{נמיר את } 4 \text{ ל-} 2^2 = 4 \text{ ונקבל: } (2^2)^6 = 2^{12}$$

קיבלנו שתי תשובות שונות בערך. אם כך, מספיק לבדוק תשובה אחת נוספת על מנת למצוא את התשובה המכילה את הביטוי השונה בערכו.

תשובה (2): $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^6$

$$\text{נהפוך את } \frac{1}{2} \text{ לבסיס } 2 \text{ ונשנה את סימן המעריך ונקבל: } 2^6 \cdot 2^{-(-3)} = 2^6 \cdot 2^3 = 2^9$$

ערכו של הביטוי שבתשובה (2) שווה לערך הביטוי שבתשובה (3) ולכן ערך הביטוי שבתשובה (4) יוצא דופן. לפיכך, תשובה (4) היא התשובה הנכונה.

שלמות - בדיקת תשובה (1): $\left(\frac{1}{4}\right)^{-5} \cdot \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{נמיר את } \frac{1}{4} &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ ונקבל: } \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} \\ \text{נהפוך כל בסיס } \frac{1}{2} &\text{ לבסיס } 2 \text{ ע"י הפוך בסיס, נשנה את סימן המעריך ונקבל: } 2^{-1} \cdot 2^{10} = 2^9 \end{aligned}$$

גם הביטוי שבתשובה (1) שווה ל- 2^9 .

מסקנה: תשובות (1), (2), (3) שוות ל- 2^9 , ואילו תשובה (4) שווה ל- 2^{12} . הביטוי היוצא דופן הוא הביטוי שבתשובה (4).

תשובה (4)

שאלה 17 - שטח משולש שווה-צלעות

השאלה:

לנעמי יש גפרורים שאורך כל אחד מהם x ס"מ. נעמי השתמשה בגפרורים (בלי לשבור אותם) כדי ליצור היקף של משולש שווה-צלעות ששטחו $\sqrt{3}x^2$ סמ"ר.

בכמה גפרורים השתמשה נעמי?

פתרון:

$$\text{נוסחת שטח משולש שווה-צלעות: } S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

מציאת אורך צלע המשולש:

נציב את השטח הנתון בנוסחה:

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \sqrt{3}x^2$$

נחלק את שני האגפים ב- $\sqrt{3}$:

$$\frac{a^2}{4} = x^2$$

$$a^2 = 4x^2$$

$$a = 2x$$

חישוב מספר הגפרורים:

כל צלע של המשולש באורך 2, כלומר כל צלע מורכבת מ-2 גפרורים.

למשולש יש 3 צלעות, לכן מספר הגפרורים הוא: $3 \times 2 = 6$

תשובה (4)

שאלה 18 - סדרות ופונקציות

השאלה:

לכל מספר שלם וחיובי n , $\$(n)$ מוגדרת כך:

$\$(n)$ = מספר של n פרות שכולן 1

לדוגמה: $\$(2) = 11$

$? = \$(n + 1)$

דרך א' - הצבת דוגמה מספרית:

גישה: משום שיש ערכים מספריים רבים שיכולים לקיים את הביטוי, נוה להציב דוגמה מספרית ולהעזר בדוגמה הנתונה בשאלה. נציב $n = 2$ ונבדוק מה ערכו של הביטוי המבוקש.

ערך הביטוי המבוקש:

$$\$(n + 1) = \$(2 + 1) = \$(3) = 111$$

בדיקת התשובות:

תשובה (1): $10 \cdot \$(n) + 1 = 10 \cdot \$(2) + 1 = 10 \cdot 11 + 1 = 111$
התשובה מתאימה ולא נוכל לפסול. לא נסמן עד שנפסול שלוש תשובות ולכן נמשיך לבדוק.

תשובה (2): $10^{n+1} = 10^{2+1} = 10^3 = 1000$
קיבלנו ערך שונה מ-111 ונוכל לפסול.

תשובה (3): $\$(n) + 1 = \$(2) + 1 = 11 + 1 = 12$
קיבלנו ערך שונה מ-111 ונוכל לפסול.

תשובה (4): $10^{\$(n)} = 10^{\$(2)} = 10^{11}$
קיבלנו ערך שונה מ-111 ונוכל לפסול.

פסלנו שלוש תשובות ולפיכך תשובה (1) הנתרת היא התשובה הנכונה.

דרך ב' - אלגברית:

תובנה: כדי לעבור מ- $\$(n)$ ל- $\$(n + 1)$, אנו מוסיפים ספרה 1 נוספת מימין. זה שקול להכפלת המספר ב-10 והוספת 1.

דוגמה:

$$\$(3) = 111 = 11 \times 10 + 1 = \$(2) \times 10 + 1$$

באופן כללי:

$$\$(n + 1) = \$(n) \times 10 + 1 = 10 \cdot \$(n) + 1$$

תשובה (1)

שאלה 19 - חפיפה מינימלית

השאלה:

בכנס כלשהו הועברו 4 הרצאות.
אורי נכח ב-3 הרצאות, שיר נכחה ב-3 הרצאות ודניאל נכח ב-2 הרצאות.

בכמה הרצאות לכל הפחות נכחו שלושתם יחד?

פתרון:

גישה: כששואלים על חפיפה מינימלית, נוח לעבוד עם נוסחת החפיפה. החפיפה המינימלית בין שני גורמים היא סכום הגורמים החופפים פחות השלם (מספר ההרצאות הכולל).

שלב 1: חפיפה מינימלית בין אורי לשיר

אורי נכח ב-3 הרצאות ושיר נכחה ב-3 הרצאות.
החפיפה המינימלית ביניהם: $3 + 3 - 4 = 2$

כלומר, לכל הפחות 2 הרצאות נכחו גם אורי וגם שיר.

שלב 2: הוספת דניאל לחישוב

דניאל נכח ב-2 הרצאות בלבד מתוך 4.
כלומר, דניאל לא נכח ב-2 הרצאות.
ייתכן מצב שבו דניאל נכח בדיוק ב-2 ההרצאות שבהן אורי ושיר לא היו יחד.
במקרה כזה, החפיפה של שלושתם היא 0.

מסקנה: לכל הפחות, ייתכן ש-0 הרצאות נכחו בהן כל השלושה יחד.

תשובה (4)

שאלה 20 - גיאומטריה

השאלה:

ABCD ו-EFGH הם ריבועים שאורכי צלעותיהם x ס"מ ו- y ס"מ (ראו סרטוט).
היקף הריבוע EFGH שווה לאורך הקו המודגש.

$$? = \frac{y}{x}$$

פתרון:

גישה: נתון כי היקף הריבוע הקטן שווה לאורך הקו המודגש בסרטוט. אם כך, נוכל לבטא את הקשר שבין הצורות באמצעות משוואה המכילה את שני הנעלמים וממנה נגזור את היחס המבוקש.

זיהוי הקו המודגש:

$$AB + BC + CD + AE + HD$$

הקו המודגש שווה לסכום האורכים: $AB + BC + CD + AE + HD$. כלומר באמצעות צלעות הריבועים.

חישוב הקטעים:

$$AB + BC + CD = 3x \text{ שווה לסכום שלוש צלעות הריבוע הגדול, ולכן: } AB + BC + CD = 3x$$

$$AE + HD \text{ שווה לצלע AD של הריבוע הגדול, פחות צלע EH של הריבוע הקטן, ולכן: } AE + HD = x - y$$



בניית משוואה:

היקף הריבוע EFGH הוא $4y$.

אורך הקו המודגש שווה ל: $3x + x - y = 4x - y$

כעת נשווה בין אורך הקו המודגש שחישבנו להיקף ריבוע EFGH ונקבל:

$$4y = 4x - y$$

נוסיף y לשני האגפים ונכנס איברים באגף ימין ונקבל:

$$5y = 4x$$

על מנת להגיע ליחס $\frac{y}{x}$ עלינו לשאלנו, נחלק את שני אגפי המשוואה ב- x וגם ב-5, ונקבל:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{5}$$

תשובה (4)

