

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(4)	(2)	(4)	(2)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(3)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(1)	(4)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(3)	(1)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - אי-שוויון

השאלה:

נתון אי-שוויון $x - y < y - x$. איזה מהאי-שוויונות הבאים נכון בהכרח?

פתרון: נפשט את אי-השוויון הנתון באמצעות כינוס איברים דומים.

נעביר את x מהאגף הימני לאגף השמאלי, ונקבל:

$$2x - y < y$$

נעביר את y מהאגף השמאלי לאגף הימני, ונקבל:

$$2x < 2y$$

נחלק את שני האגפים ב-2, ונקבל:

$$x < y$$

מכיוון שמצאנו כי $x < y$, הרי שזו התשובה הנכונה.

תשובה (4).

שאלה 2 - צירופים

השאלה:

5 בני אדם נפגשים, וכל אחד מהם לוחץ ידיים פעם אחת (ורק פעם אחת) עם כל אחד מהאחרים. כמה לחיצות ידיים נלחצו?

פתרון: נספור את לחיצות הידיים ידנית.

האדם הראשון לוחץ יד ל-4 אנשים אחרים (לכל אחד מהאחרים).

האדם השני לוחץ יד ל-3 אנשים נוספים בלבד, מכיוון שהוא כבר לחץ יד לאדם הראשון.

האדם השלישי לוחץ יד ל-2 אנשים נוספים בלבד (הרביעי והחמישי).

האדם הרביעי לוחץ יד לאדם 1 נוסף בלבד (החמישי).

האדם החמישי כבר לחץ יד לכולם, ולכן אין לחיצות נוספות.

$$סך כל לחיצות הידיים: 4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

סך הכול נלחצו 10 לחיצות ידיים.

תשובה (2).



שאלה 3 - זוויות במחומש

השאלה:

בסרטוט שלפניכם מחומש. לפי הנתונים שבסרטוט, מהו בהכרח גודלה של β ?

דרך א': סכום זוויות במחומש

הנוסחה לסכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל n צלעות היא: סכום הזוויות $= (n - 2) \cdot 180^\circ$

במחומש יש 5 צלעות, ולכן סכום הזוויות הפנימיות שווה ל- $540^\circ = 3 \cdot 180^\circ = (5 - 2) \cdot 180^\circ$.

טיפ: מחומש הוא צורה שמופיעה לעתים קרובות בבחינה, ולכן מומלץ לזכור בעל פה שסכום הזוויות במחומש הוא 540° .

בסרטוט רואים כי שלוש מהזוויות הן זוויות ישרות (90° כל אחת), ושתי הזוויות הנותרות הן α ו- β .

$$3 \cdot 90^\circ + \alpha + \beta = 540^\circ \text{ מתקיים:}$$

$$270^\circ + \alpha + \beta = 540^\circ \text{ נפשט:}$$

$$\alpha + \beta = 270^\circ \text{ נעביר את } 270^\circ \text{ לאגף השני:}$$

$$\boxed{\beta = 270^\circ - \alpha} \text{ נעביר את } \alpha \text{ לאגף השני ונקבל:}$$

דרך ב': השלמת משולש

נשלים משולש בפניה הימנית התחתונה של המחומש על ידי המשכת הצלעות.

הזווית במשולש הסמוכה ל- α היא הזווית המשלימה אותה ל- 180° , כלומר $180^\circ - \alpha$.

הזווית במשולש הסמוכה ל- β היא הזווית המשלימה אותה ל- 180° , כלומר $180^\circ - \beta$.

הזווית השלישית במשולש היא 90° (זווית ישרה).

מכיוון שסכום הזוויות במשולש שווה ל- 180° , נקבל:

$$(180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta) + 90^\circ = 180^\circ$$

$$450^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ \text{ נפשט:}$$

$$450^\circ - 180^\circ = \alpha + \beta \text{ נעביר את } \alpha \text{ לאגף הימני ואת } 180^\circ \text{ לאגף השמאלי:}$$

$$\alpha + \beta = 270^\circ \text{ נקבל:}$$

$$\boxed{\beta = 270^\circ - \alpha} \text{ נעביר את } \alpha \text{ לאגף השני ונקבל:}$$

תשובה (4).



שאלה 4 - בעיה מילולית

השאלה:

בכל יום בחודש שתארכו הוא מספר זוגי דני קונה מוצרים בסכום של 18 שקלים.
בכל יום בחודש שתארכו הוא מספר אי-זוגי דני קונה מוצרים בסכום של 12 שקלים.
בחודש כלשהו 30 יום. בכמה שקלים סך הכול דני קונה מוצרים בחודש זה?

פתרון: במקום לחשב את הימים הזוגיים והאי-זוגיים בנפרד, נשתמש בשיטה יעילה יותר - נסתכל על הימים בזוגות.

שלב א': כמה דני מוציא בזוג ימים?

ניקח זוג ימים עוקבים, למשל יום 1 (אי-זוגי) ויום 2 (זוגי).
ביום האי-זוגי דני מוציא 12 שקלים, וביום הזוגי הוא מוציא 18 שקלים.
לכן בכל זוג של יום אי-זוגי ויום זוגי, דני מוציא סך הכול: $12 + 18 = 30$ שקלים.

שלב ב': כמה זוגות כאלה יש בחודש?

בחודש של 30 יום יש 15 ימים זוגיים ו-15 ימים אי-זוגיים.
מכיוון שיש מספר שווה של ימים זוגיים ואי-זוגיים, אפשר "לשייך" כל יום זוגי ליום אי-זוגי ולקבל 15 זוגות.

שלב ג': חישוב הסכום הכולל

יש לנו 15 זוגות, ובכל זוג דני מוציא 30 שקלים.
לכן סך ההוצאה בחודש: $15 \cdot 30 = 450$ שקלים.

סך הכול דני קונה מוצרים ב-450 שקלים בחודש זה.

תשובה (2).

שאלה 5 - גיאומטריה

השאלה:

על צלעותיו של טרפז שווה-שוקיים בנו ריבועים. סכום שטחי הריבועים שנבנו על הבסיסים שווה לסכום שטחי הריבועים שנבנו על השוקיים.
הבסיס העליון הוא a , הבסיס התחתון הוא $2a$, והשוקיים הן b .
מהו היחס $\frac{a}{b}$?

פתרון:

שלב א': חישוב סכום שטחי הריבועים על הבסיסים

שטח ריבוע שווה לצלע כפול צלע, כלומר לצלע בריבוע.
שטח הריבוע על הבסיס העליון (צלע a) $a \cdot a = a^2$
שטח הריבוע על הבסיס התחתון (צלע $2a$) $2a \cdot 2a = 4a^2$
סכום שטחי הריבועים על הבסיסים $a^2 + 4a^2 = 5a^2$

שלב ב': חישוב סכום שטחי הריבועים על השוקיים

על כל שוק (באורך b) נבנה ריבוע ששטחו $b \cdot b = b^2$.
מכיוון שיש שתי שוקיים, נבנו שני ריבועים על השוקיים, ולכן סכום שטחיהם $b^2 + b^2 = 2b^2$

שלב ג': בניית משוואה ופתרון

לפי הנתון, סכום שטחי הריבועים על הבסיסים שווה לסכום שטחי הריבועים על השוקיים:
 $5a^2 = 2b^2$

נחלק את שני האגפים ב- b^2 וב-5, ונקבל:
 $\frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{5}$

נוציא שורש משני האגפים ונקבל: $\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{2}{5}}$

תשובה (2).



השאלה:

A, B, C ו-D הן אותיות המייצגות ספרות שונות זו מזו בין 1 ל-9.

$$AB + AB = CDA$$

נתון: $AB + AB = CDA$ הוא מספר זוגי. איזו מהטענות הבאות נכונה בהכרח?

פתרון:

הצבה בשאלה כזו עלולה להיות קשה, מכיוון שיש הרבה אפשרויות לערכים של הספרות. לכן ננסה לחפש הגיון כללי בתרגיל.

דרך א': מספר כפול עצמו

התרגיל הוא חיבור של שני מספרים זהים: $AB + AB$.

חיבור מספר לעצמו שקול להכפלתו ב-2, כלומר $AB + AB = 2 \cdot AB$.

מכפלה של 2 במספר שלם כלשהו היא תמיד מספר זוגי, ולכן CDA הוא מספר זוגי.

ספרת האחדות של מספר זוגי היא תמיד זוגית, ולכן A זוגי.

דרך ב': התבוננות בספרת האחדות

נתבונן בספרת האחדות של התוצאה. בתוצאה CDA, ספרת האחדות היא A.

ספרת האחדות של התוצאה נקבעת על פי חיבור ספרות האחדות של המחברים. במקרה שלנו, ספרות האחדות של שני המחברים הן B ו-B, ולכן ספרת האחדות של התוצאה היא ספרת האחדות של $B + B$.

מכיוון ש- $B + B = 2B$, זהו מספר זוגי (מכפלה של 2 במספר שלם כלשהו היא תמיד זוגית).

ספרת האחדות של מספר זוגי היא תמיד זוגית (0, 2, 4, 6 או 8).

לכן A, שהיא ספרת האחדות של $2B$, חייבת להיות זוגית.

תשובה (1).

שאלה 7 - עצרות

השאלה:

x הוא מספר חיובי.

$$x^2 \cdot (120!)^2 = 120! \cdot 121!$$

מהו x?

פתרון:

מהי עצרת? עצרת של מספר n (מסומנת $n!$) היא מכפלת כל המספרים השלמים מ-1 עד n. למשל: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

כלל חשוב: אפשר לרשום $n \cdot (n-1)!$ מכיוון ש- $n!$ הוא מכפלת כל המספרים עד n, ו- $(n-1)!$ הוא מכפלת כל המספרים עד $n-1$. למשל:

$$6! = 6 \cdot 5!$$

$$121! = 121 \cdot 120!$$

נפשט את המשוואה:

$$x^2 \cdot (120!)^2 = 120! \cdot 121!$$

$$x^2 \cdot (120!)^2 = 120! \cdot 121 \cdot 120!$$

$$x^2 \cdot (120!)^2 = 121 \cdot (120!)^2$$

$$x^2 = 121$$

מכיוון שנתון ש-x חיובי, נקבל:

$$x = 11$$

תשובה (2).



שאלה 8 - שברים אלגבריים

השאלה:

נתון: $|a| \neq |b|$
 $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} = ?$

פתרון:

כדי לחסר שברים, צריך מכנה משותף. מאחר ולמכנים $(a-b)$ ו- $(a+b)$ אין גורם משותף, המכנה המשותף הוא מכפלתם: $(a-b)(a+b)$.

נכפיל כל שבר כך שהמכנה יהיה המכנה המשותף:

$$\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a(a+b)}{(a-b)(a+b)} - \frac{b(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$

נאחד את המונים:

$$= \frac{a(a+b) - b(a-b)}{(a-b)(a+b)}$$

נפתח סוגריים במונה:

$$= \frac{a^2 + ab - ab + b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{(a-b)(a+b)}$$

נשתמש בנוסחת הכפל המקוצר השלישית: $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$:

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$$

הערה: הנתון $|a| \neq |b|$ מבטיח שהמכנה $a^2 - b^2 \neq 0$, כלומר השבר מוגדר.

תשובה (1).



הסקה מתרשים (שאלות 9-12)

שאלה 9 - הסקה מתרשים

השאלה:

מסך כל הפגישות שערך עובד ד', מספר הפגישות הגדול ביותר היה עם עובד -

פתרון:

לפי המקרא, המספר המודגש (מחוץ לסוגריים) מציין את מספר הפגישות. נבדוק את כל הפגישות של עובד ד' עם כל אחד מהעובדים בתשובות.

תשובה (1) - עובד ג': עובד ד' פגש את עובד ג' 5 פעמים. נמשיך ונבדוק האם זהו מספר הפגישות הגדול ביותר.

תשובה (2) - עובד ו': עובד ד' פגש את עובד ו' 12 פעמים. זה יותר גדול. נבדוק האם זהו מספר הפגישות הגדול ביותר.

תשובה (3) - עובד ז': עובד ד' פגש את עובד ז' 8 פעמים. פחות מ-12 פגישות.

תשובה (4) - עובד ח': עובד ד' פגש את עובד ח' 6 פעמים. פחות מ-12 פגישות.

12 הוא מספר הפגישות הגדול ביותר, ולכן מספר הפגישות הגדול ביותר שערך עובד ד' היה עם עובד ו'.

תשובה (2).

שאלה 10 - הסקה מתרשים

השאלה:

מזוגות העובדים שבהם עובד אחד בדיוק הוא אדריכל, כמה זוגות כתבו יחד דו"ח?

פתרון:

נספור ידנית. ראשית, נשים לב שרק עובדים א', ב' וג' הם אדריכלים. לכן עלינו למצוא את כל הזוגות שבהם אדריכל (עובד א', ב' או ג') כתב דו"ח משותף עם עובד שאינו אדריכל (עובד ד', ה', ו', ז', ח' או ט').

נעבור על התרשים ונחפש משבצות עם דו"ח משותף:

עובד א': כתב דו"ח משותף עם עובד ב'. אבל עובד ב' הוא גם אדריכל, ולכן זוג זה לא עונה על הדרישה "עובד אחד בדיוק הוא אדריכל".

עובד ב': כתב דו"ח משותף עם עובד ד', וכתב דו"ח משותף נפרד עם עובד ט'. שני הזוגות האלה עונים על הדרישה.

עובד ג': כתב דו"ח משותף עם עובד ז'. זוג זה עונה על הדרישה.

סך הכול 3 זוגות שבהם עובד אחד בדיוק הוא אדריכל כתבו יחד דו"ח.

תשובה (3).

שאלה 11 - הסקה מתרשים

השאלה:

"זוג מוצלח" הוא זוג עובדים שהיו לו לפחות ארבע פגישות יעילות.
מהזוגות שבהם לפחות עובד אחד הוא גרפיקאי, כמה זוגות הם זוגות מוצלחים?

פתרון:

נשים לב שרק עובדים ז', ח' וט' הם גרפיקאים. לכן עלינו למצוא את כל הזוגות שבהם לפחות אחד מהעובדים הוא גרפיקאי, ומספר הפגישות היעילות (המספר בסוגריים) הוא 4 או יותר. מכיוון שהתנאי הוא "לפחות עובד אחד", גם זוגות של שני גרפיקאים מתאימים לנו.

נעבור על התרשים ונחפש זוגות מוצלחים:

עובד ז':

- ✓ עובד ז' ועובד ג' - 8 פגישות יעילות
- ✓ עובד ז' ועובד ד' - 6 פגישות יעילות
- ✓ עובד ז' ועובד ה' - 4 פגישות יעילות

עובד ח':

- ✓ עובד ח' ועובד א' - 6 פגישות יעילות

עובד ט':

- ✓ עובד ט' ועובד ח' - 4 פגישות יעילות

סך הכול 5 זוגות מוצלחים שבהם לפחות עובד אחד הוא גרפיקאי.

תשובה (1).

שאלה 12 - הסקה מתרשים

השאלה:

אחד מזוגות העובדים כתב דו"ח לאחר שערך 3 פגישות לא יעילות ברצף.
מה נכון בהכרח לגבי שני העובדים בזוג זה?

פתרון:

מספר הפגישות הלא יעילות שווה לסך הפגישות פחות הפגישות היעילות (המספר המודגש פחות המספר בסוגריים).

נחפש בתרשים את כל הדו"חות (משבצות עם מסגרת שחורה) שבהם יש 3 פגישות לא יעילות או יותר.

יש שני דו"חות כאלה:

עובד ה' ועובד ו': 6 פגישות סך הכול, 3 פגישות יעילות - כלומר 3 פגישות לא יעילות. שניהם מתכנתים.

עובד ד' ועובד ח': 6 פגישות סך הכול, 2 פגישות יעילות - כלומר 4 פגישות לא יעילות. עובד ד' הוא מתכנת, עובד ח' הוא גרפיקאי.

בשאר הדו"חות לא היו יותר מ-2 פגישות לא יעילות.

נבדוק את התשובות:

תשובה (1) - הם בעלי אותו מקצוע: לא נכון בהכרח, כי זוג העובדים ד'-ח' מורכב ממתכנת וגרפיקאי.

תשובה (2) - הם אינם בעלי אותו מקצוע: לא נכון בהכרח, כי זוג העובדים ה'-ו' מורכב משני מתכנתים.

תשובה (3) - לפחות אחד מהם הוא גרפיקאי: לא נכון בהכרח, כי זוג העובדים ה'-ו' מורכב משני מתכנתים.

תשובה (4) - לפחות אחד מהם הוא מתכנת: נכון בהכרח! בשני הזוגות יש לפחות מתכנת אחד.

התשובה היחידה שנכונה לשני הזוגות היא שלפחות אחד מהעובדים הוא מתכנת.

תשובה (4).

השאלה:

שטחו של איזה משני המשולשים הבאים גדול יותר?
משולש א': צלעות 5, 8 ס"מ
משולש ב': צלעות 5, 6 ס"מ

פתרון:

שני המשולשים הם שווי שוקיים. נחשב את שטח כל אחד מהם על ידי מציאת הגובה לבסיס. במשולש שווה שוקיים, הגובה לבסיס יורד לאמצע הבסיס ומחלק אותו לשני חלקים שווים.

משולש א' (צלעות 5, 8):

נוריד גובה לבסיס 8. הגובה יחלק את הבסיס לשני חלקים שווים באורך 4 כל אחד. נוצר משולש ישר זווית עם ניצב 4 (חצי הבסיס) והיתר 5 (השוק של המשולש המקורי). נסמן את הגובה ב-h ונחשב לפי משפט פיתגורס:

$$h^2 + 4^2 = 5^2$$

$$h^2 + 16 = 25$$

$$h^2 = 9$$

$$h = 3$$

זוהי השלשה הפיתגוראית 3-4-5 שרצוי לזכור.

$$\text{שטח משולש א'} = 12 = \frac{8 \cdot 3}{2} \text{ סמ"ר}$$

משולש ב' (צלעות 5, 6):

נוריד גובה לבסיס 6. הגובה יחלק את הבסיס לשני חלקים שווים באורך 3 כל אחד. נוצר משולש ישר זווית עם ניצב 3 (חצי הבסיס) והיתר 5 (השוק של המשולש המקורי). לפי אותה שלשה פיתגוראית, הגובה הוא 4.

$$\text{שטח משולש ב'} = 12 = \frac{6 \cdot 4}{2} \text{ סמ"ר}$$

שני המשולשים בעלי שטח זהה של 12 סמ"ר.

תשובה (3).

שאלה 14 - התחלקות ב-3

השאלה:

M הוא מספר שלם.
נתון: ערכו של הביטוי $(M-1)(M-2)$ מתחלק ב-3.
איזה משלושת המספרים הבאים בוודאות אינו מתחלק ב-3?

כלל חשוב: מכל שלושה מספרים שלמים עוקבים, בדיוק אחד מהם מתחלק ב-3.

פתרון:

המספרים $M-2$, $M-1$, M הם שלושה מספרים עוקבים, ולכן בדיוק אחד מהם מתחלק ב-3.

נתון שהמכפלה $(M-1)(M-2)$ מתחלקת ב-3, כלומר לפחות אחד מהמספרים $M-1$ או $M-2$ מתחלק ב-3.

מכיוון שאחד מהם מתחלק ב-3 (אנחנו לא יודעים איזה), ומכל שלושה עוקבים רק אחד מתחלק ב-3, נובע ש-M בוודאות אינו מתחלק ב-3.

בדיקת שאר התשובות:

המספרים M , $M+1$, $M+2$ הם גם שלושה עוקבים. מכיוון ש-M לא מתחלק ב-3, אחד מהמספרים $M+1$ או $M+2$ חייב להתחלק ב-3, אבל לא ניתן לדעת איזה מהם.

M הוא המספר היחיד שבוודאות אינו מתחלק ב-3.

תשובה (1).



שאלה 15 - בעיה מילולית

השאלה:

בכיתה 40 תלמידים. ל-50% מהתלמידים שיער שחור. ל-40% מהתלמידים שיער ג'ינג'י. ל-25% מהתלמידים עיניים כחולות. ידוע ש-10% מהתלמידים שצבע שערם שחור הם בעלי עיניים כחולות. מן התלמידים ששערם ג'ינג'י, כמה לכל הפחות הם בעלי עיניים כחולות?

פתרון:

שלב א': תרגום הנתונים למספרים

תלמידים עם שיער שחור: 50% מתוך 40 = 20 תלמידים
תלמידים עם שיער ג'ינג'י: 40% מתוך 40 = 16 תלמידים
תלמידים עם צבע שיער אחר: $40 - 20 - 16 = 4$
תלמידים עם עיניים כחולות: 25% מתוך 40 = 10 תלמידים
תלמידים עם שיער שחור ועיניים כחולות: 10% מתוך 20 = 2 תלמידים

שלב ב': חישוב תלמידים עם עיניים כחולות ללא שיער שחור

מתוך 10 התלמידים עם עיניים כחולות, 2 הם בעלי שיער שחור.
לכן $8 = 10 - 2$ תלמידים עם עיניים כחולות אין להם שיער שחור.
8 התלמידים האלה מתחלקים בין 16 הג'ינג'ים ו-4 התלמידים עם צבע שיער אחר.

שלב ג': מציאת המינימום

כדי למצוא את המינימום של ג'ינג'ים עם עיניים כחולות, נרצה למקסם את מספר התלמידים עם צבע שיער אחר שיש להם עיניים כחולות.
יש רק 4 תלמידים עם צבע שיער אחר, ולכן לכל היותר 4 מהם יכולים להיות בעלי עיניים כחולות.
לכן לכל הפחות $4 = 8 - 4$ ג'ינג'ים הם בעלי עיניים כחולות.

לכל הפחות 4 תלמידים ששערם ג'ינג'י הם בעלי עיניים כחולות.

תשובה (4).

שאלה 16 - מהירות

השאלה:

כלי רכב עובר קילומטר אחד ב-72 שניות.
מה מהירותו של כלי הרכב בקמ"ש?

פתרון:

שלב א': המרת שניות לדקות

בדקה יש 60 שניות, ולכן:
72 שניות = $\frac{72}{60}$ דקות = $\frac{6}{5}$ דקות

שלב ב': חישוב המהירות בקמ"ש

כלי הרכב עובר קילומטר אחד בזמן של $\frac{6}{5}$ דקות.
בשעה יש 60 דקות. כדי לדעת כמה קילומטרים כלי הרכב עובר בשעה, נחשב כמה פעמים הזמן $\frac{6}{5}$ דקות נכנס ב-60 דקות:
 $60 \div \frac{6}{5} = 60 \times \frac{5}{6} = \frac{300}{6} = 50$

מהירות כלי הרכב היא 50 קמ"ש.

תשובה (1).

השאלה:

הנקודה O היא מרכז המעגל. B, A ו-C הן נקודות על היקף המעגל. ABOC היא מקבילית. כמה גדלים שונים זה מזה יכולים להיות לזווית BOC?

פתרון:

שלב א': זיהוי אורכי הצלעות

נמתח קו בין קודקוד A למרכז המעגל O. אורכו r (הרדיוס).
O היא מרכז המעגל, ולכן $OB = OC = r$.
במקבילית, צלעות נגדיות שוות זו לזו, ולכן: $AB = OC = r$ ו- $CA = BO = r$.
כל צלעות המקבילית שוות ל-r, כלומר ABOC הוא מעוין.

שלב ב': זיהוי משולשים שווי צלעות

משולש AOC הוא משולש שווה צלעות שכל צלעותיו שוות ל-r.
משולש AOB הוא משולש שווה צלעות שכל צלעותיו שוות ל-r.

שלב ג': חישוב זווית BOC

במשולש שווה צלעות כל זווית שווה ל- 60° .

$$\angle AOC = 60^\circ$$

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$\angle BOC = \angle AOB + \angle AOC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

יש רק גודל אחד אפשרי ל- $\angle BOC$, והוא 120° .

תשובה (1).

שאלה 18 - חזקות

השאלה:

נתון: $x^{-n} = x^{2n}$, $x \neq 0$, $n \neq 0$.
איזו מהטענות הבאות נכונה?

פתרון:

נציב ערכים ונבדוק את התשובות.

נציב $n = 1$ (אי-זוגי):

$$x^2 = x^{-1}$$

$$x^2 = \frac{1}{x}$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

נציב $n = 2$ (זוגי):

$$x^4 = x^{-2}$$

$$x^4 = \frac{1}{x^2}$$

$$x^6 = 1$$

$$x = -1 \text{ או } x = 1$$

בדיקת התשובות:

תשובה (1): אם n זוגי, אז בהכרח $x = 1$ - לא נכון, כי x יכול להיות גם -1.

תשובה (2): אם n זוגי, אז בהכרח $x = -1$ - לא נכון, כי x יכול להיות גם 1.

תשובה (3): אם n אי-זוגי, אז בהכרח $x = 1$ - לא מצאנו הפרכה לתשובה זו.

תשובה (4): אם n אי-זוגי, אז בהכרח $x = -1$ - לא נכון, כי ראינו ש- $x = 1$.

מאחר שמצאנו הפרכות לכל שאר התשובות, ניתן לפסוק שתשובה (3) היא הנכונה.

מדוע כאשר n זוגי גם $x = -1$ אפשרי, אבל כאשר n אי-זוגי רק $x = 1$ אפשרי?

חזקה זוגית יכולה להיות תוצאה של מספר שלילי (למשל $(-1)^2 = 1$), ולכן כאשר n זוגי גם $x = -1$ מקיים את המשוואה. לעומת זאת, חזקה אי-זוגית עם תוצאה חיובית היא בהכרח של מספר חיובי, ולכן כאשר n אי-זוגי רק $x = 1$ אפשרי.

תשובה (3).



השאלה:

בסרטוט שלפניכם גליל שבתוכו כלואים שני חרוטים.
 AB הוא קוטר בבסיס התחתון של הגליל, O-1 היא מרכז הבסיס הזה.
 רדיוס בסיס הגליל הוא r, וגובה הגליל הוא h.
 AO ו-BO הם קטרים בבסיסי שני החרוטים, וגובה החרוטים הוא h.
 מהו היחס בין סכום נפחי החרוטים לנפח הגליל?

פתרון:

שלב א': זיהוי הנתונים

רדיוס בסיס הגליל = r, גובה הגליל = h.
 $AO = BO = r$ (חצי הקוטר AB).
 AO ו-BO הם קטרים בבסיסי החרוטים, ולכן רדיוס בסיס כל חרוט = $\frac{r}{2}$.
 גובה כל חרוט = h.

שלב ב': חישוב נפח הגליל

נפח גליל = שטח הבסיס כפול הגובה = $\pi r^2 \cdot h$

שלב ג': חישוב נפח חרוט אחד

נפח חרוט שווה לשליש מנפח גליל בעל אותו בסיס ואותו גובה. כלומר: $\frac{\pi r^2 h}{3}$
 בחרוטים שלנו: רדיוס הבסיס = $\frac{r}{2}$, גובה = h.

$$\frac{\pi \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot \frac{r^2}{4} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{12}$$

שלב ד': חישוב נפח שני החרוטים

$$2 \cdot \frac{\pi r^2 h}{12} = \frac{\pi r^2 h}{6}$$

שלב ה': חישוב היחס

$$\frac{\frac{\pi r^2 h}{6}}{\pi r^2 h} = \frac{\pi r^2 h}{6} \cdot \frac{1}{\pi r^2 h} = \frac{1}{6}$$

היחס בין סכום נפחי החרוטים לנפח הגליל הוא $\frac{1}{6}$.

תשובה (1).

שאלה 20 - בעיה מילולית

השאלה:

בבנק כלשהו יש לשלם עמלה בסך 0.25 שקלים על כל שקל שממירים למטבע זר.
 ללאה יש 1000 שקלים. היא רוצה לרכוש בבנק הזה בוליביאנים, המטבע של מדינת בוליביה, ששערך הוא 0.5 שקלים ליחידה.
 כמה בוליביאנים תוכל לאה לקנות בסכום שיש לה, אם סכום זה ישמש אותה גם לתשלום העמלה?

העמלה היא על כל שקל שממירים, לא על כל בוליביאן שקונים. לכן כל 1 שקל שלאה רוצה להמיר עולה לה 1.25 שקלים (השקל עצמו + 0.25 שקל עמלה).

פתרון:

שלב א': חישוב הסכום האפקטיבי להמרה

כל 1.25 שקלים של לאה שווים 1 שקל אפקטיבי להמרה.
 לכן הסכום האפקטיבי שלאה יכולה להמיר הוא:
 $1000 \div 1.25 = 1000 \div \frac{5}{4} = 1000 \times \frac{4}{5} = 800$
 כלומר, 200 שקלים ילכו לתשלום העמלה, ו-800 שקלים יומרו לבוליביאנים.

שלב ב': חישוב מספר הבוליביאנים

לאה יכולה להמיר 800 שקלים לבוליביאנים. כל בוליביאן עולה 0.5 שקל.
 מספר הבוליביאנים שלאה יכולה לקנות:
 $800 \div 0.5 = 800 \times 2 = 1600$

לאה תוכל לקנות 1600 בוליביאנים.

תשובה (1).

