

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(2)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(2)	(1)	(4)	(4)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(3)

הסברים

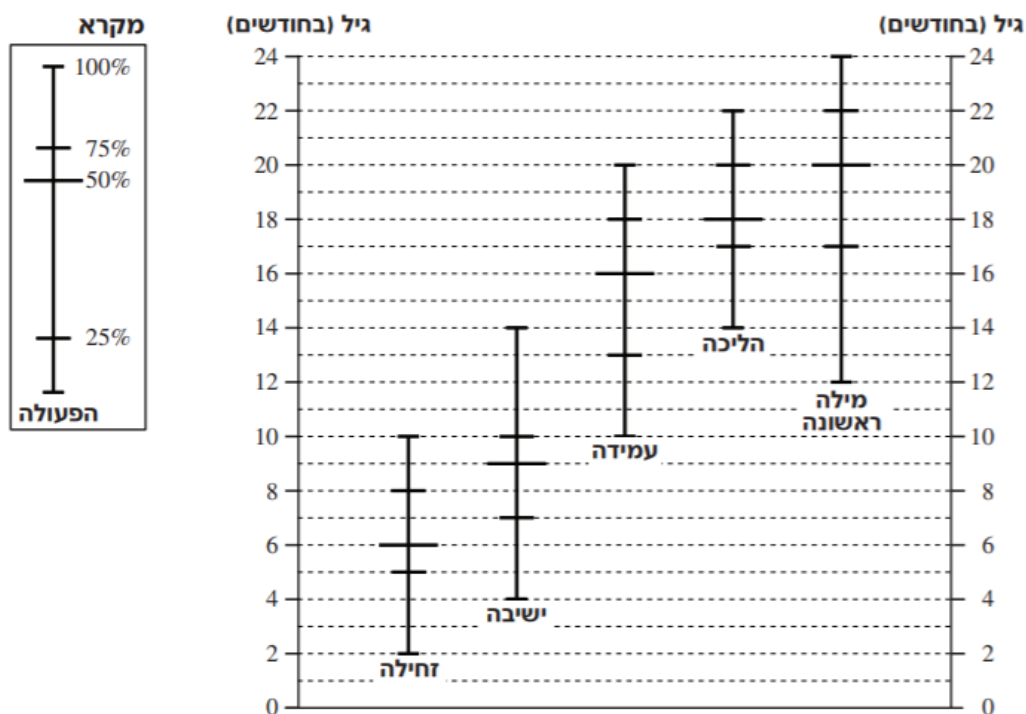
הסקה מתרשים (שאלות 1-4)

עיינו היטב בתרשים שלפניכם, וענו על ארבע השאלות שאחריו.

התרשים מתאר את גיל הלמידה של חמש פעולות בסיסיות - זחילה, ישיבה, עמידה, הליכה ואמירת מילה ראשונה - בקרב כל התינוקות שנולדו במדינה כלשהי בשנת 2010. גיל הלמידה הוא הגיל שבו ביצע התינוק את הפעולה בפעם הראשונה בחייו.

הקווים האנכיים מתארים את טווח הגילים שבו נלמדה כל פעולה. על כל קו מסומנים הגילים שעד אליהם למדו את הפעולה 25%, 50%, 75% ו-100% מהתינוקות (ראו מקרא). הקו התחתון ביותר מסמן את הגיל שעד אליו לא למד אף אחד מהתינוקות את הפעולה.

לדוגמה, עד גיל 5 חודשים למדו 25% מהתינוקות לזחול.



שימו לב: בתשובתכם לכל שאלה התעלמו מנתונים המופיעים בשאלות האחרות.

1.

השאלה: מה טווח הגילים שבו למדו כל התינוקות לעמוד?

פתרון: טווח הגילים שבו למדו כל התינוקות לעמוד הוא בין הגיל בו התינוק הראשון למד לעמוד, ועד לגיל בו 100% מהתינוקות למדו לעמוד.

נתבונן על הקו המתאר את אחוז התינוקות שלמדו לעמוד. כאשר נסתכל על הציר האנכי, נראה שהפעולה 'עמידה' מתחילה מגיל 10 חודשים וממשיכה עד לגיל 20 חודשים. כלומר טווח הגילים בו למדו כל התינוקות לעמוד היה 10-20 חודשים.

תשובה (3).

2.

השאלה: ידוע שאחת התינוקות שנולדו במדינה ב-2010 למדה להגיד מילה ראשונה בדיוק בגיל שבו למדה פעולה אחרת.

איזו מהפעולות הבאות **אינה** יכולה להיות אותה פעולה אחרת?

פתרון: תינוקת שנולדה בשנת 2010 למדה להגיד מילה בגיל כלשהו. לפי התרשים, טווח הגילים בו כל התינוקות למדו להגיד מילה ראשונה הוא בין גיל 12 חודשים ועד גיל 24 חודשים. כלומר, התינוקת למדה להגיד מילה ראשונה בין גיל 12 ל-24 חודשים.

באותו גיל, התינוקת למדה פעולה אחרת. עלינו למצוא פעולה שלא ייתכן שהיא למדה באותו גיל. לפיכך, עלינו למצוא איזו פעולה לא ייתכן שהתינוקת למדה בטווח הגילים שבין 12 ל-24 חודשים.

נעבור על התשובות המוצעות:

תשובה (1): זחילה

לפי התרשים, כל התינוקות למדו לבצע את הפעולה 'זחילה' בין גיל 2 ל-10 חודשים. אם כל התינוקות למדו לזחול עד גיל 10 חודשים, והתינוק הראשון שלמד להגיד מילה ראשונה עשה זאת בגיל 12 חודשים, הרי שלא ייתכן שהתינוקת למדה את שתי הפעולות באותו הזמן. מכאן שזו התשובה הנכונה.

תשובה (1).

3.

השאלה: עד לגיל שבו למדו 25% מהתינוקות _____, כבר למדו לפחות 75% מהתינוקות _____.

פתרון: עלינו להשלים את החסר. לכן, נבדוק את התשובות המוצעות. התשובה הנכונה היא זו שתיצור משפט נכון:

תשובה (1): עד לגיל שבו למדו 25% מהתינוקות **לשבת**, כבר למדו לפחות 75% מהתינוקות **לזחול**.

על פי התרשים, הגיל בו למדו 25% מהתינוקות לשבת הוא גיל 7 חודשים. בגיל 7 חודשים ניתן לראות שפחות מ-75% מהתינוקות למדו לזחול. למעשה, רק בגיל 8 חודשים למדו 75% מהתינוקות לזחול. על כן, זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2): עד לגיל שבו למדו 25% מהתינוקות **לעמוד**, כבר למדו לפחות 75% מהתינוקות **לשבת**.

על פי התרשים, הגיל בו למדו 25% מהתינוקות לעמוד הוא גיל 13 חודשים. הגיל בו למדו 75% מהתינוקות לשבת הוא 10 חודשים. לכן, נכון להגיד כי עד גיל 13 חודשים למדו לפחות 75% מהתינוקות לשבת, שהרי הם למדו זאת כבר בגיל 10 חודשים. לפיכך, זו התשובה הנכונה.

תשובה (2).

4. **השאלה:** אם עד גיל 15 חודשים למדו 10% מהתינוקות ללכת,

מה אחוז התינוקות שלמדו ללכת עד גיל 16 חודשים?

פתרון: לפי הנתון, עד גיל 15 חודשים, 10% מהתינוקות למדו ללכת. אם נסתכל על חלוקת האחוזים על גבי הציר האנכי המתאר את גיל התינוקות שלמדו ללכת, נוכל לראות שאין עקביות. כלומר, 0%-25% מהתינוקות למדו ללכת בין הגילים 14-17 חודשים, אך 25%-50% מהתינוקות למדו ללכת בין הגילים 17-18 חודשים; 50%-75% מהתינוקות למדו ללכת בין גילאי 18-20 חודשים; 75%-100% מהתינוקות למדו ללכת בין גילאי 20-22 חודשים. מכיוון שאין עקביות בין פער הגילים לבין אחוז התינוקות שלמדו לבצע את הפעולה, לא ניתן לקבוע כמה אחוזים מהתינוקות למדו ללכת עד גיל 16 חודשים.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 5-20)

5. **השאלה:** נתון: $2x + y < 1$

$$x < y$$

x יכול להיות שווה ל -

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

נשאלנו מה יכול להיות ערכו של x, ובתשובות מוצעים מספרים. לכן, נוכל לבדוק את התשובות. עלינו למצוא תשובה המקיימת את הנתונים. נציב את המספרים שבתשובות בשני האי-שוויונים הנתונים, ונבדוק האם הם מקיימים את הנתונים. התשובה הנכונה תהיה זו שתקיים את שני הנתונים. נבחר לבדוק את התשובה הנוחה ביותר לבדיקה. מכיוון שהתשובה הראשונה היא הנוחה ביותר לבדיקה נתחיל איתה:

תשובה (1): 1. נציב $x = 1$ באי השוויון הראשון, ונקבל:

$$2x + y < 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 1 + y < 1 \Leftrightarrow 2 + y < 1$$

נחסר 2 משני צדי האי-שוויון, ונקבל: $2 + y < 1 \Leftrightarrow y < -1$.

לפי הנתון השני: $x < y$. מצאנו כי כאשר $x = 1$ אז $y < -1$, כלומר y שלילי, ועל כן x גדול מ-y.

כאשר $x = 1$ נוצרת סתירה, ועל כן זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2) היא התשובה הבאה הנוחה לבדיקה:

תשובה (2): 2. נציב $x = 2$ באי השוויון הראשון, ונקבל:

$$2x + y < 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 + y < 1 \Leftrightarrow 4 + y < 1$$

נחסר 4 משני צדי האי-שוויון, ונקבל: $4 + y < 1 \Leftrightarrow y < -3$.

לפי הנתון השני: $x < y$. מצאנו כי כאשר $x = 2$ אז $y < -3$, כלומר y שלילי, ועל כן x גדול מ-y.

כאשר $x = 2$ נוצרת סתירה, ועל כן זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3) היא התשובה הבאה הנוחה לבדיקה :

תשובה (3): $\frac{1}{2}$. נציב $x = \frac{1}{2}$ באי השוויון הראשון, ונקבל:

$$1 + y < 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} + y < 1 \Leftrightarrow 2x + y < 1$$

נחסר 1 משני צדי האי-שוויון, ונקבל: $1 + y < 1 \Leftrightarrow y < 0$.

לפי הנתון השני: $x < y$. מצאנו כי כאשר $x = \frac{1}{2}$ אז $y < 0$, כלומר y שלילי, ועל כן x

גדול מ- y .

כאשר $x = \frac{1}{2}$ נוצרת סתירה, ועל כן זו אינה התשובה הנכונה.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות, הרי שתשובה (4) היא התשובה הנכונה. אולם, לשם השלמת ההסבר נבדוק גם אותה:

תשובה (4): $\frac{1}{4}$. נציב $x = \frac{1}{4}$ באי השוויון הראשון, ונקבל:

$$\frac{1}{2} + y < 1 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{1}{4} + y < 1 \Leftrightarrow 2x + y < 1$$

נחסר $\frac{1}{2}$ משני צדי האי-שוויון, ונקבל: $\frac{1}{2} + y < 1 \Leftrightarrow y < \frac{1}{2}$.

לפי הנתון השני: $x < y$. מצאנו כי כאשר $x = \frac{1}{4}$ אז $y < \frac{1}{2}$, ולכן ייתכן כי x קטן מ- y .

אם למשל $y = \frac{1}{3}$ אז $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ וגם $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$.

מצאנו כי כאשר $x = \frac{1}{4}$ הנתונים מתקיימים, ועל כן זו התשובה הנכונה.

דוגמה ב': פשוט אלגברי

עלינו למצוא מה יכול להיות ערכו של x . כדי שנוכל למצוא מה יכול להיות ערכו של x עלינו למצוא את הטווח המדויק ביותר עבורו. לכן נאחד את שני הנתונים כך שנקבל את הטווח של x . כדי לעשות זאת יש להיפטר מ- y . לכן נבודד אותו מהאי-שוויון הראשון:

נחסר $2x$ משני צדי האי-שוויון, ונקבל: $2x + y < 1 \Leftrightarrow y < 1 - 2x$.

נתון כי $x < y$ ולכן נוכל לאחד את שני אי השוויונים. נקבל כי:

$$x < y < 1 - 2x. \text{ מכאן נוכל להסיק כי מתקיים: } x < 1 - 2x$$

כעת נפשט את אי השוויון שקיבלנו. נוסיף $2x$ לשני צדי האי-שוויון, ונקבל:

$$3x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

נחלק את שני צדי האי-שוויון ב-3, ונקבל: $x < \frac{1}{3}$.

המספר היחיד מהמספרים שבתשובות המוצעות הקטן מ- $\frac{1}{3}$ הוא $\frac{1}{4}$. לכן תשובה (4) היא התשובה

הנכונה.

תשובה (4).

6. **השאלה:** מוריס עולה במדרגות בקצב של 2 מדרגות בשלוש שניות, ויורד במדרגות בקצב של 3 מדרגות בשתי שניות.

בכמה שניות סך הכול מוריס עולה ויורד 6 מדרגות?

פתרון: נחשב בנפרד כמה זמן ייקח למוריס לעלות במדרגות וכמה זמן ייקח לו לרדת במדרגות.

נמצא כמה זמן לוקח למוריס לעלות:

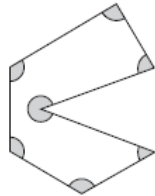
נתון כי מוריס עולה 2 מדרגות בשלוש שניות. מכאן שעלייה של 6 מדרגות, הגדולה פי 3, תיקח לו פי 3 זמן. מכאן שלמוריס ייקח 9 שניות לעלות במדרגות ($3 \cdot 3 =$).

נמצא כמה זמן לוקח למוריס לרדת:

נתון כי מוריס יורד 3 מדרגות בשתי שניות. מכאן שירידה של 6 המדרגות, הגדולה פי 2, תיקח לו פי 2 זמן. לפיכך למוריס ייקח 4 שניות לרדת במדרגות ($2 \cdot 2 =$).

מצאנו כי העלייה תיקח למוריס 9 שניות, וכי הירידה תיקח לו 4 שניות. לכן, בסך הכול ייקח למוריס 13 שניות לעלות ולרדת 6 מדרגות ($9 + 4 =$).

תשובה (2).



7. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם מצולע בעל 7 צלעות.

מה סכום הזוויות המסומנות באפור?

פתרון: על פי הסרטוט שלפנינו, הזוויות המסומנות באפור הן כל הזוויות הפנימיות במצולע בעל 7 צלעות. כלומר, עלינו למצוא את סכום הזוויות הפנימיות במצולע בעל 7 צלעות.

לפי הנוסחה לחישוב סכום הזוויות במצולע, סכום הזוויות במצולע בעל n צלעות שווה ל: $180^\circ \cdot (n - 2)$. עלינו למצוא את סכום הזוויות במצולע בעל 7 צלעות, ועל כן $n = 7$. לכן, סכום הזוויות במצולע שווה ל: $180^\circ \cdot (7 - 2) \Leftrightarrow 180^\circ \cdot 5 \Leftrightarrow 900^\circ$.

תשובה (4).

8.

השאלה: 2% מ- $2x$ שווים ל-

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכו של x ועל כן נוכל להציב מספרים במקומו. בשאלות אחוזים עם נעלמים, נעדיף להציב 100. נציב כי $x = 100$ ומכאן ש: $2x = 200$.

נמצא כמה הם 2% מ- $2x$:

מצאנו כי $2x = 200$. 1% מ-200 הם $2 \left(\frac{200}{100} = 2 \right)$. מכאן ש-2% מ-200, שהם פי 2 מ-1%, שווים ל-4.
($2 \cdot 2 = 4$)

כעת נעבור על התשובות המוצעות ונבדוק איזה מהביטויים שווה ל-4 כאשר $x = 100$:

תשובה (1): 1% מ- x

1% מ- x כאשר $x = 100$ הם 1% מ-100. 1% מ-100 הם $1 \left(\frac{100}{100} = 1 \right)$. לא שווה ל-4 ועל כן התשובה אינה נכונה.

תשובה (2): 2% מ- $4x$

2% מ- $4x$ כאשר $x = 100$ הם 2% מ-400. 1% מ-400 הם $4 \left(\frac{400}{100} = 4 \right)$. מכאן ש-2% מ-400, שהם פי 2, שווים ל-8 ($4 \cdot 2 = 8$). לא שווה ל-4 ועל כן התשובה אינה נכונה.

תשובה (3): 4% מ- $4x$

4% מ- $4x$ כאשר $x = 100$ הם 4% מ-400. בתשובה (2) מצאנו ש-2% מ-400 הם 4, ולפיכך 4% מ-400, שהם פי 2, שווים ל-8 ($4 \cdot 2 = 8$). לא שווה ל-4 ועל כן התשובה אינה נכונה.

תשובה (4): 4% מ- x

4% מ- x כאשר $x = 100$ הם 4% מ-100. 4% מ-100 אכן שווים ל-4 ולכן התשובה מתאימה. מכיוון שפסלנו 3 תשובות, ניתן לסמן את תשובה (4) כתשובה נכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי

על פי נוסחת האחוזים, 2% מ- $2x$ שווים ל: $\frac{2}{100} \cdot 2x \Leftrightarrow \frac{4x}{100}$.

כעת נעבור על התשובות המוצעות ונמצא מי מהן שווה לביטוי שקיבלנו:

תשובה (1): 1% מ- x

על פי נוסחת האחוזים, 1% מ- x שווים ל: $\frac{1}{100} \cdot x \Leftrightarrow \frac{x}{100}$. הביטוי שקיבלנו אינו שווה לביטוי עליו נשאלנו ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (2): 2% מ- $4x$

על פי נוסחת האחוזים, 2% מ- $4x$ שווים ל: $\frac{2}{100} \cdot 4x \Leftrightarrow \frac{8x}{100}$. הביטוי שקיבלנו אינו שווה לביטוי עליו נשאלנו, ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (3): 4% מ- $4x$

על פי נוסחת האחוזים, 4% מ- $4x$ שווים ל: $\frac{4}{100} \cdot 4x \Leftrightarrow \frac{16x}{100}$. הביטוי שקיבלנו אינו שווה לביטוי עליו נשאלנו, ולכן זו אינה התשובה הנכונה.

תשובה (4): 4% מ- x

על פי נוסחת האחוזים, 4% מ- x שווים ל: $\frac{4}{100} \cdot x \Leftrightarrow \frac{4x}{100}$. הביטוי שקיבלנו שווה לביטוי עליו נשאלנו ולכן זו התשובה הנכונה.

דרך ג': הבנה תיאורטית

השלם כפי שהוצג בשאלה הוא $2x$. לעומת זאת, בתשובות השלם הוא x או $4x$. ניתן גם לראות כי בתשובה (2) האחוז זהה לזה שבנתוני השאלה. 2% משלם כלשהו יהיו שווים ל-2% משלם אחר רק אם השלמים שווים זה לזה. כלומר, 2% מ- $2x$ יהיה שווה רק ל-2% מ- $2x$. $4x$ גדול פי 2 מ- $2x$. לכן, 2% מ- $4x$ יהיו בהכרח גדולים פי 2 מ-2% מ- $2x$. מכאן שתשובה (2) אינה נכונה.
נבין מה קורה כאשר השלם הוא x :
 x קטן פי 2 מ- $2x$. כאשר השלם קטן פי 2 יש לקחת ממנו אחוז גדול פי 2 על מנת שישתווה לאחוז מהשלם הגדול יותר. על כן, 2% מ- $2x$ יהיו שווים ל-4% מ- x . על כן תשובה (4) היא התשובה הנכונה.
לשם השלמת ההסבר נבין מה קורה כאשר השלם הוא $4x$:
 $4x$ גדול פי 2 מ- $2x$. כאשר השלם גדול פי 2 יש לקחת ממנו אחוז קטן פי 2 על מנת שישתווה לאחוז מהשלם הקטן. על כן, 2% מ- $2x$ שווים ל-1% מ- $4x$.

תשובה (4).

9. השאלה: a הוא מספר שלם וחיובי. b הוא מספר שלם ושלילי.

$$x = (2a - 1)(2b + 1) \quad \text{נתון:}$$

x הוא בהכרח מספר -

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על ערכם של a ו- b ועל כן נוכל להציב דוגמה מספרית במקומם. נתון כי a שלם וחיובי, וכי b שלם ושלילי. לכן, נציב למשל: $a = 1$ ו- $b = -1$.

כעת, בעזרת המספרים שהצבנו, נמצא את ערכו של x . נציב $a = 1$ ו- $b = -1$, ונקבל:

$$\begin{aligned} x &= (2a - 1)(2b + 1) \Leftrightarrow x = (2 \cdot 1 - 1)(2 \cdot (-1) + 1) \Leftrightarrow x = (-1)(-2 + 1) \Leftrightarrow x = (-1)(-1) \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

מצאנו ש- $x = 1$. $x = -1$ הוא מספר אי-זוגי ושלילי ולכן רק תשובה (2) מתאימה.

דרך ב': הבנה אלגברית

על פי התשובות המוצעות, עלינו למצוא מהן תכונותיו של x : האם הוא שלילי או חיובי, והאם הוא זוגי או אי-זוגי. לכן, ננתח את x על פי נתוני השאלה. המספר x הוא מכפלה של שני מספרים, שכל אחד מהם הוא סכום של שני ביטויים.

ננתח כל אחד מהגורמים במכפלה על מנת ללמוד על תכונותיו של x :

$$\text{הביטוי } (2a - 1):$$

נתון כי a הוא מספר שלם וחיובי. לכן, הביטוי $2a$ הוא למעשה מכפלה של מספר שלם חיובי ב-2.

תוצאת המכפלה של מספר ב-2 זוגית בהכרח, ולכן $2a$ זוגי.

המספר החיובי והשלם הקטן ביותר הוא 1. לכן, מכיוון שידוע כי a שלם וחיובי, הרי ש- $2a$ שווה לכל הפחות ל-2 ($2 \cdot 1 = 2$).

מהביטוי $2a$ מחסירים 1. כלומר, למעשה מחסירים מספר אי-זוגי (1) ממספר זוגי ($2a$). ההפרש בין מספר זוגי למספר אי-זוגי הוא אי-זוגי בהכרח. לכן, הביטוי ($2a - 1$) הוא אי-זוגי.

בנוסף, מצאנו ש- $2a$ שווה לכל הפחות ל-2. אם מחסירים מ-2 את המספר 1, הרי שהתוצאה היא מספר חיובי בהכרח ($2 - 1 = 1$). אם הביטוי $2a$ גדול מ-2, כלומר חיובי יותר, הרי שאם נחסיר מהביטוי 1 התוצאה עדיין תהיה חיובית, ואף חיובית יותר.

לסיכום: הביטוי ($2a - 1$) הוא מספר אי-זוגי חיובי.

ננתח את הביטוי ($2b + 1$):

נתון כי b הוא מספר שלם ושלילי. לכן, הביטוי $2b$ הוא מכפלה של מספר שלם ושלילי ב-2. תוצאת המכפלה של מספר שלם ב-2 זוגית בהכרח. כמו כן, תוצאת המכפלה של מספר חיובי במספר שלילי שלילית בהכרח. מכך ניתן להסיק כי $2b$ הוא מספר זוגי ושלילי.

בנוסף, מכיוון ש- b שלם ושלילי, הרי שהוא שווה לכל הפחות ל-(-1). לפיכך, ניתן לקבוע כי הביטוי $2b$ שווה לכל היותר ל-(-2) $[2 \cdot (-1) = -2]$.

לביטוי $2b$ מוסיפים 1. כלומר, מחברים מספר אי-זוגי (1) למספר זוגי ($2b$). סכום של מספר אי-זוגי ומספר זוגי הוא מספר אי-זוגי. לכן, הביטוי ($2b + 1$) הוא אי-זוגי.

בנוסף, מצאנו ש- $2b$ שווה לכל היותר ל-(-2). אם מוסיפים ל-(-2) את המספר 1, הרי שהתוצאה היא מספר שלילי בהכרח ($-2 + 1 = -1$). לפיכך, אם הביטוי $2b$ קטן יותר מ-(-2), כלומר שלילי יותר, הרי שאם נוסיף לביטוי זה 1 עדיין נקבל תוצאה שלילית, ואף שלילית יותר.

לסיכום: הביטוי ($2b + 1$) הוא מספר אי-זוגי ושלילי.

נתבונן על הביטוי $(2a - 1)(2b + 1)$:

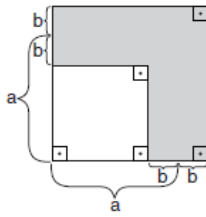
מצאנו כי ($2a - 1$) הוא מספר אי-זוגי, וכי הביטוי ($2b + 1$) הוא מספר אי-זוגי.

מכפלה של שני מספרים אי-זוגיים היא אי-זוגית גם. לכן, הביטוי $(2a - 1)(2b + 1)$ הוא אי-זוגי. כעת ניתן לפסול את תשובות (3) ו-(4).

כמו כן, מצאנו כי ($2a - 1$) הוא מספר חיובי, וכי הביטוי ($2b + 1$) הוא מספר שלילי. מכפלה של מספר חיובי במספר שלילי היא שלילית בהכרח. לכן, הביטוי $(2a - 1)(2b + 1)$ שלילי בהכרח.

לסיכום: מצאנו כי הביטוי $(2a - 1)(2b + 1)$ הוא אי-זוגי ושלילי, ולכן x הוא מספר אי-זוגי ושלילי.

תשובה (2).



10. השאלה: לפי הנתונים בסרטוט שלפניכם, מה גודל השטח הכהה?

התשובה: ד' א': הצבת דוגמה מספרית

פתרון: לא נשאלנו על ערכם של a ו- b . לכן, ניתן להציב מספרים במקומם. המידע הקיים עבור a ו- b נמצא בנתוני הסרטוט בלבד. מהסרטוט ניתן לראות כי a גדול מ- b . מכיוון שאין מגבלות נוספות, נבחר להציב מספרים נוחים שמקיימים נתון זה. נציב למשל כי: $a = 3$ ו- $b = 1$.

השטח הכהה הוא צורה מורכבת. למעשה, מדובר במשושה לא משוכלל. לצורה כזו אין נוסחה לחישוב שטח, ולכן נעדיף לחשב את גודל השטח הכהה על ידי חיסור שטחים.

הערה: ניתן לחלק את הצורה הכהה לשני מלבנים. כך ניתן לחשב את שטחו של כל אחד מהמלבנים שנוצרו ולסכום את שטחיהם. גם שיטה זו טובה לפתרון השאלה, אולם מכיוון שהמربع הגדול הוא ריבוע, וכך גם המרובע הלבן, הרי שיהיה קל יותר לחשב את גודל השטח הכהה באמצעות חיסור שטחי המרובעים.

נמצא את גודלו של השטח הכהה בעזרת המספרים שהצבנו ובאמצעות חיסור שטחים: על פי נתוני הסרטוט, צלעו של הריבוע הגדול מורכבת מסכום המספרים a ו- b . הצבנו כי $a = 3$ ו- $b = 1$, ולכן אורך צלעו של הריבוע הגדול שווה ל- 4 (כי $3 + 1 = 4$). שטחו של ריבוע שווה לאורך צלעו בריבוע. מכאן ששטח הריבוע הגדול שווה ל- 16 סמ"ר ($4^2 = 16$).

על פי נתוני הסרטוט, צלעו של הריבוע הלבן שווה להפרש בין a ל- b . הצבנו כי $a = 3$ ו- $b = 1$, ולכן אורך צלעו של הריבוע הקטן שווה ל- 2 סמ"ר ($3 - 1 = 2$). מכאן ששטח הריבוע הלבן שווה ל- 4 סמ"ר ($2^2 = 4$).

כאמור, השטח הכהה שווה להפרש בין שטחו של הריבוע הגדול לשטחו של הריבוע הלבן. מצאנו ששטחו של הריבוע הגדול הוא 16 סמ"ר, וכי שטחו של הריבוע הלבן הוא 4 סמ"ר. מכאן שהשטח הכהה שווה ל- 12 סמ"ר ($16 - 4 = 12$).

כעת נעבור על התשובות המוצעות. נציב בהן כי $a = 3$ ו- $b = 1$ ונפסול כל תשובה שונה מ- 12 :

תשובה (1): $2(a + b)$

נציב כי $a = 3$ ו- $b = 1$, ונקבל: $2(a + b) \Leftrightarrow 2(3 + 1) \Leftrightarrow 8$. התוצאה שהתקבלה שונה מ- 12 ולכן התשובה נפסלה.

תשובה (2): $4ab$

נציב כי $a = 3$ ו- $b = 1$, ונקבל: $4ab \Leftrightarrow 4 \cdot 3 \cdot 1 \Leftrightarrow 12$. התוצאה שהתקבלה שווה ל- 12 ולכן לא ניתן לפסול את התשובה בשלב זה.

תשובה (3): $4b^2$

נציב כי $b = 1$, ונקבל: $4b^2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1^2 \Leftrightarrow 4$. התוצאה שהתקבלה שונה מ- 12 ולכן התשובה נפסלה.

תשובה (4): $a^2 - b^2$

נציב כי $a = 3$ ו- $b = 1$, ונקבל: $a^2 - b^2 \Leftrightarrow 3^2 - 1^2 \Leftrightarrow 9 - 1 \Leftrightarrow 8$. התוצאה שהתקבלה שונה מ- 12 ולכן התשובה נפסלה.

מכיוון שפסלנו 3 תשובות הרי שתשובה (2) היא התשובה הנכונה.

ד"ר ב': פישוט אלגברי

נחשב את שטח הריבוע הגדול:

כאמור, המרובע הגדול הוא ריבוע, שכן, על פי נתוני הסרטוט, צלעותיו שוות זו לזו. על פי הסרטוט, אורך צלע הריבוע שווה לסכום האורכים a ו- b , כלומר ל- $(a + b)$ ס"מ. שטח ריבוע שווה לאורך צלעו בריבוע, ומכאן ששטחו של הריבוע הגדול שווה ל- $(a + b)^2$ סמ"ר.

נחשב את שטח הריבוע הלבן:

כאמור, המרובע הלבן הוא ריבוע, שכן, על פי נתוני הסרטוט, צלעותיו שוות זו לזו. על פי הסרטוט, אורך צלע הריבוע שווה להפרש בין a ל- b , כלומר ל- $(a - b)$ ס"מ. שטח ריבוע שווה לאורך צלעו בריבוע, ומכאן ששטחו של הריבוע הלבן שווה ל- $(a - b)^2$ סמ"ר.

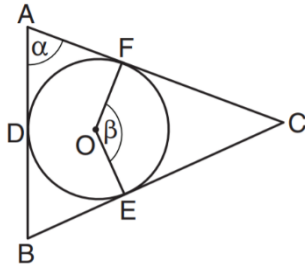
נחשב את גודל השטח הכהה:

גודל השטח הכהה שווה להפרש בין שטח הריבוע הגדול לבין שטח הריבוע הלבן. מצאנו ששטחו של הריבוע הגדול שווה ל- $(a + b)^2$ סמ"ר, וכי שטחו של הריבוע הלבן שווה ל- $(a - b)^2$ סמ"ר. מכאן שהשטח הכהה שווה ל: $(a + b)^2 - (a - b)^2$. למעשה קיבלנו את ההפרש בין נוסחת הכפל המקוצרת ה-I לבין ה-II. כזכור, ההפרש בין הנוסחה ה-I ל-II הוא $4ab$. לפיכך השטח הכהה שווה ל- $4ab$.
הערה: ניתן למצוא את השטח הכהה בעזרת פתיחת סוגריים לפי נוסחאות הכפל המקוצר וכינוס איברים. עם זאת, אם זוכרים שההפרש בין הנוסחה ה-I ל-II הוא $4ab$, אז הדרך לתוצאה קצרה יותר.

תשובה (2).

11.

השאלה: המשולש ABC חוסם מעגל שמרכזו O.
D, E ו-F הן נקודות ההשקה של המעגל עם המשולש.
נתון: $AD = BD$



לפי נתון זה והנתונים שבסרטוט,
 $\beta = ?$

פתרון: עלינו למצוא את זווית β . על פי התשובות, ניתן לראות
כי יש לבטא את גודלה של זווית β באמצעות זווית α .

זווית β היא זווית מרכזית במעגל שבסרטוט. בנוסף, זווית β

היא זווית פנימית במרובע FOEC. זווית α אינה זווית מרכזית או היקפית במעגל. לכן, ראשית ננסה
למצוא את זווית β בעזרת סכום הזוויות במרובע FOEC.

נתון כי הנקודות E ו-F הן נקודות ההשקה של המעגל עם המשולש. המשיק למעגל מאונך לרדיוס
שבנקודת ההשקה. על פי הסרטוט, OE ו-OF הם רדיוסים במעגל, ומכאן ש: $\angle OFC = \angle OEC = 90^\circ$.
כעת, על מנת שנוכל להשתמש בסכום הזוויות במרובע FOEC כדי למצוא את זווית β , עלינו למצוא את
זווית $\angle ACB$.

זווית $\angle ACB$ היא זווית במשולש ABC. במשולש זה, אחת הזוויות הפנימיות היא זווית α . נשתמש
בסכום הזוויות במשולש כדי למצוא את זווית $\angle ACB$. לשם כך, נמצא את זווית $\angle ABC$.

המשולש ABC משיק למעגל. במעגל, שני משיקים היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה. מכאן ש:
 $AD = AF$ וגם $BD = BE$ וגם $EC = FC$.

נתון כי $AD = BD$, ולכן אנו למדים כי: $BD = BE = AD = AF$. כלומר ניתן לקבוע כי $AF = BE$.

על פי הסרטוט, הצלע AC היא סכום הקטעים AF ו-FC, והצלע BC היא סכום הקטעים BE ו-EC.
מצאנו כי $AF = BE$ וגם כי $EC = FC$. לכן ניתן לקבוע כי $AC = BC$. מכאן שמשולש ABC הוא
משולש שווה שוקיים. במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו, ועל כן: $\angle ABC = \alpha$.

סכום הזוויות במשולש שווה ל- 180° . לפיכך ניתן לקבוע כי: $\angle CAB + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$.
מצאנו כי $\angle ABC = \angle BAC = \alpha$ ומכאן ש: $\alpha + \alpha + \angle ACB = 180^\circ \Leftrightarrow 2\alpha + \angle ACB = 180^\circ$.
נחסר 2α משני צדי המשוואה, ונקבל: $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$.

נתבונן במרובע FOEC:

סכום הזוויות במרובע שווה ל- 360° . מכאן ש: $\angle OFC + \angle FOE + \angle OEC + \angle ACB = 360^\circ$.

מצאנו כי $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$ וכי $\angle OFC = \angle OEC = 90^\circ$. מכאן ש:

$$\beta - 2\alpha + 360^\circ = 360^\circ \Leftrightarrow 90^\circ + \beta + 90^\circ + (180^\circ - 2\alpha) = 360^\circ$$

נחסר $(360^\circ - 2\alpha)$ משני צדי המשוואה, ונקבל: $\beta = 2\alpha$.

תשובה (2).

12. השאלה: נתון: $9|a| - 6b = 24$

$$3|a| - 2|b| = 4$$

$$b = ?$$

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

נשאלנו על ערכו של b , כאשר בתשובות מוצעים מספרים נוחים. לכן, נבחר לבדוק את התשובות המוצעות. עבור כל תשובה שנבדוק נציב את הערך המספרי שבה במקום b באחת מהמשוואות הנתונות. בעזרת המספר שנציב במשוואה נמצא את a . לבסוף, נבדוק אם המספרים מתאימים גם למשוואה השנייה. התשובה הנכונה תהיה זו שבה ערכם של a ו- b יקיימו גם את המשוואה השנייה.

נבחר לבדוק קודם את התשובה הנוחה ביותר לבדיקה. התשובה הנוחה ביותר לבדיקה היא תשובה (1):

תשובה (1): -1. נציב כי $b = -1$ במשוואה הראשונה, ונקבל: $9|a| - 6b = 24$

$$9|a| + 6 = 24 \Leftrightarrow 9|a| - 6 \cdot (-1) = 24$$

$$9|a| = 18 \Leftrightarrow |a| = 2$$

$$9|a| = 18 \Leftrightarrow |a| = 2$$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-9, ונקבל: $|a| = 2$. כעת ניתן למצוא את ערכו של a . אולם, מכיוון שגם במשוואה השנייה מופיע a בתוך ערך מוחלט ניתן לפסוח על מציאת ערכו של a .

$$3|a| - 2|b| = 4 \Leftrightarrow 3 \cdot 2 - 2 \cdot |-1| = 4$$

$$6 - 2 = 4 \Leftrightarrow 4 = 4$$

קיבלנו משוואה נכונה ועל כן זו התשובה הנכונה.

דרך ב': פישוט אלגברי + בדיקת תשובות

לפנינו מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, הכוללת ערך מוחלט בתוכה. נשאלנו על ערכו של b . כדי שנוכל למצוא את ערכו של b עלינו 'להיפטר' מ- a .

a מופיע בשתי המשוואות בתוך ערך מוחלט, ולכן נוכל להיפטר ממנו על ידי השוואת המקדמים שלפני הערך המוחלט, וחסיון המשוואות. לשם כך נכפיל את המשוואה השנייה פי 3:

$$9|a| - 6|b| = 12 \Leftrightarrow 3|a| - 2|b| = 4$$

כעת לפנינו שתי משוואות עם מקדם זהה לפני $|a|$, ולכן ניתן לחסר את המשוואות זו מזו. נחסר את המשוואה הראשונה מהמשוואה השנייה, ונקבל:

$$9|a| - 6b = 24$$

$$-9|a| + 6|b| = 12$$

$$-6b - (-6|b|) = 24 - 12$$

$$-6b + 6|b| = 12 \Leftrightarrow -6b - (-6|b|) = 24 - 12$$

$$6|b| - 6b = 12$$

$$6|b| - 6b = 12 \Leftrightarrow |b| - b = 2$$

$$|b| - b = 2 \Leftrightarrow |b| = b + 2$$

מכאן ייתכנו שתי אפשרויות: $b = b + 2$ או $-b = b + 2$.

נבדוק כל אפשרות בנפרד:

אם $b = b + 2$, נחסר b משני צדי המשוואה, ונקבל: $0 = 2$. למשוואה זו אין פתרון, ולכן נבדוק מה קורה באפשרות השנייה:

$$-b = b + 2 \Leftrightarrow -2b = 2$$

$$-2b = 2 \Leftrightarrow b = -1$$

תשובה (1):

13.

השאלה: אלפרד, בני וג'ורג' הם אספנים, וכל אחד מהם מחזיק בבעלותו יצירות אמנות.

בכמה יקטן מספר היצירות הממוצע לאספן, אם אלפרד ימכור למוזאון 18 מהיצירות שבבעלותו ובני ירכוש 6 יצירות חדשות?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

אין בשאלה נתונים לגבי מספר היצירות שהיו לכל אספן בתחילה, או ממוצע היצירות של כל השלושה. בנוסף, לא נשאלנו על מספר היצירות שהיו לכל אחד מהאספנים בהתחלה, ולכן נוכל להציב מספרים במקומם. ידוע כי אלפרד מכר 18 מהיצירות שהיו בתשובות, ולכן נבחר להציב כי לכל אחד מהאספנים היו 20 יצירות בהתחלה. שימו לב כי אין מגבלה בנתוני השאלה שמונעת מאיתנו להציב אותו מספר יצירות לכל אספן. אם שלושת האספנים היו 20 יצירות, הרי שמספר היצירות הממוצע שלהם

$$\text{בהתחלה היה } 20 \text{ יצירות } \left(= \frac{20 + 20 + 20}{3} \right).$$

נמצא את ממוצע היצירות של שלושת האספנים לאחר הרכישה והמכירה של היצירות: $(20 - 18) = 2$ יצירות. לפיכך, לאחר שאלפרד מכר 18 יצירות, נותרו לו 2 יצירות. לבני היו 20 יצירות. לכן, לאחר שבני רכש 6 יצירות, יש בבעלותו 26 יצירות $(20 + 6)$.

ג'ורג' לא מכר או רכש יצירות ולכן יש בבעלותו 20 יצירות.

$$\text{מכאן שבעת מספר היצירות הממוצע של שלושתם הוא } 16 \left(= \frac{2 + 26 + 20}{3} = \frac{48}{3} \right).$$

לפני המכירה והרכישה של היצירות, מספר היצירות הממוצע של השלושה היה 20. מכאן שמספר היצירות הממוצע קטן ב-4 $(20 - 16)$.

דרך ב': בניית משוואה

נשאלנו בכמה קטן ממוצע היצירות לאספן לאחר מכירת ורכישת יצירות על ידי שני אספנים. איננו יודעים מהו מספר היצירות המקורי של כל אספן, או את סכום היצירות של השלושה. לכן, נגדיר את ממוצע היצירות המקורי בתור x .

על פי נוסחת הממוצע, הממוצע שווה לסכום האיברים חלקי מספר האיברים. הממוצע הוא מספר היצירות הממוצע של 3 אספנים. לכן, מספר האיברים, כלומר מספר המשתתפים בממוצע הוא 3 -

$$\text{אלפרד, בני וג'ורג'. נסמן ב-} y \text{ את סכום היצירות של שלושת האספנים. מכאן ש: } \frac{y}{3} = x.$$

$$\text{נכפול את שני צדי המשוואה ב-3, ונקבל: } y = 3x.$$

כלומר, מצאנו כי סכום היצירות המקורי של שלושת האספנים הוא $3x$.

$$\text{אלפרד מכר 18 יצירות, ובני רכש 6 יצירות. מכאן שבעת סכום היצירות של השלושה הוא: } 3x - 18 + 6 = 3x - 12.$$

נמצא את ממוצע היצירות החדש:

מצאנו כי בעת סכום יצירותיהם של שלושת האספנים שווה ל- $(3x - 12)$, ומכאן שממוצע היצירות

$$\text{שלהם בעת שווה ל: } \frac{3x - 12}{3}.$$

$$\text{נוציא גורם משותף 3 במונה השבר, ונקבל: } \frac{3(x - 4)}{3} \Leftrightarrow x - 4.$$

לסיכום: הגדרנו את ממוצע היצירות המקורי בתור x , ומצאנו כי בעת ממוצע היצירות של האספנים שווה ל- $(x - 4)$. מכאן, שבעת ממוצע היצירות של האספנים קטן ב-4 מממוצע היצירות המקורי.

ד"ר ג': השינוי בסכום

כדי לדעת בכמה קטן ממוצע היצירות של השלושה נסתכל על השינוי בסכום יצירותיהם. לאלפרד, בני וג'ורג' היה מספר מסוים של יצירות. אלפרד מכר 18 יצירות ובני רכש 6 יצירות. לפיכך, לאחר רכישת ומכירת היצירות, סכום היצירות של השלושה קטן ב-12 ($-18 + 6 =$). על פי נוסחת הממוצע, הממוצע שווה לסכום היצירות לחלק במספר המשתתפים. בממוצע יש 3 משתתפים. לפיכך, לפי נוסחת הממוצע, אם סכום היצירות קטן ב-12 הרי שהממוצע קטן ב- $\frac{12}{3}$. כלומר הממוצע קטן ב-4.

תשובה (4).

$$14. \text{ השאלה: נתון: } \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{2^x}{x}$$

$$x = ?$$

פתרון: פשוט אלגברי + בדיקת תשובות

לפנינו משוואה עם נעלם אחד, ובה עלינו למצוא את ערכו של x . המשוואה כוללת שברים וחזקות שבעת אין לנו אפשרותנו לצמצם. לכן, ראשית נפשט את הביטוי:

$$\frac{100}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{36}{25} = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow \frac{10^2}{4} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{2^x}{x}$$

כעת ניתן לצמצם את השברים שבצידה השמאלי של המשוואה:

$$\frac{25}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{25} = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow \frac{100^{25}}{4_1} \cdot \frac{1}{9_1} \cdot \frac{36^4}{25} = \frac{2^x}{x}$$

$$\text{נמשיך לצמצם: } 4 = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow \frac{25^1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{25_1} = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow \frac{25}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{25} = \frac{2^x}{x}$$

המשוואה שקיבלנו אינה נוחה לפתרון אלגברי. בנוסף, נשאלנו על ערכו של x כאשר בתשובות מוצעים מספרים נוחים. לכן, כעת נעדיף לבדוק את התשובות המוצעות. נציב את המספרים שבתשובות במשוואה שקיבלנו. התשובה הנכונה תהיה זו שתקיים את המשוואה. נעדיף לבדוק קודם את התשובות בהן המספרים קטנים. לכן, נבדוק קודם את תשובה (2):

$$\text{תשובה (2): } 2. \text{ נציב כי } x = 2 \text{ במשוואה, ונקבל: } 4 = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow 4 = \frac{2^2}{2} \Leftrightarrow 4 = \frac{4}{2} \Leftrightarrow 4 = 2$$

המשוואה שקיבלנו אינה נכונה, ולפיכך התשובה נפסלת.

נמשיך לבדוק את תשובה (3), בה מופיע המספר הכי קטן אחרי תשובה (2):

$$\text{תשובה (3): } 3. \text{ נציב כי } x = 3 \text{ במשוואה, ונקבל: } 4 = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow 4 = \frac{2^3}{3} \Leftrightarrow 4 = \frac{8}{3}$$

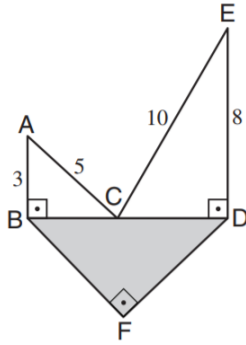
המשוואה שקיבלנו אינה נכונה, ולפיכך התשובה נפסלת.

נמשיך לתשובה (4):

$$\text{תשובה (4): } 4. \text{ נציב כי } x = 4 \text{ במשוואה, ונקבל: } 4 = \frac{2^x}{x} \Leftrightarrow 4 = \frac{2^4}{4} \Leftrightarrow 4 = \frac{16}{4} \Leftrightarrow 4 = 4$$

המשוואה שקיבלנו נכונה, ולפיכך זו התשובה הנכונה.

תשובה (4).



15. **השאלה:** בסרטוט שלפניכם ABC ו-CDE משולשים ישרי-זווית.

BFD משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים.

אורכי הצלעות הנתונים בסרטוט הם בס"מ.

על פי נתונים אלו והנתונים שבסרטוט,

מה שטח המשולש הכהה BFD (בס"מ)?

פתרון: עלינו למצוא את שטחו של משולש BFD. נתון כי משולש BFD הוא משולש ישר זווית. שטח משולש ישר שווה למכפלת הניצבים חלקי 2. בנוסף, ידוע כי משולש BFD הוא משולש שווה שוקיים. לכן, על מנת שנוכל לחשב את שטחו, יש למצוא את אורך אחד הניצבים, אשר שווה באורכו לניצב השני.

בשאלה זו, נתונים אורכיהן של צלעות במשולשים ישרי זווית. בכל אחד מהמשולשים ABC ו-CDE ידועים אורכיהן של שתי צלעות במשולש. לכן, נוכל למצוא את הצלע השלישית בכל אחד מהמשולשים הללו באמצעות משפט פיתגורס.

במשולש ABC:

נתון כי אורך היתר במשולש שווה ל-5 ס"מ, וכי אורך אחד הניצבים שווה ל-3 ס"מ. על פי השלשה הפיתגורית $3:4:5$, אורך הניצב השני שווה ל-4 ס"מ. כלומר $BC = 4$.

במשולש CDE:

נתון כי אורך היתר של המשולש שווה ל-10 ס"מ, וכי אורך אחד הניצבים שווה ל-8 ס"מ. על פי השלשה הפיתגורית $6:8:10$, אורך הניצב השני שווה ל-6 ס"מ. כלומר $CD = 6$.

על פי הסרטוט, הצלע BD היא סכום הצלעות BC ו-CD. מצאנו כי $BC = 4$ וכי $CD = 6$. מכאן ש:
 $BD = BC + CD = 4 + 6 = 10$.

נתבונן במשולש BFD:

משולש זה הוא משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים. כלומר, זהו משולש כסף. במשולש כסף היתר גדול פי $\sqrt{2}$ מהניצב. מצאנו כי אורך היתר במשולש זה שווה ל-10 ס"מ, ומכאן שאורך הניצב שווה ל- $5\sqrt{2}$.
 $\left(\frac{10}{\sqrt{2}} = \right)$

כעת נחשב את שטח המשולש BFD:

מצאנו כי אורך הניצב הוא $5\sqrt{2}$ ס"מ. כאמור, שטח משולש ישר זווית שווה למכפלת הניצבים חלקי 2. כמו כן, במשולש זה הניצבים שווים זה לזה, ומכאן ששטח המשולש שווה ל:

$$.25 \Leftrightarrow \frac{25 \cdot \cancel{2}^1}{\cancel{2}_1} \Leftrightarrow \frac{5^2 (\sqrt{2})^2}{2} \Leftrightarrow \frac{(5\sqrt{2})^2}{2}$$

תשובה (1).

16. השאלה: גילו של שלומי היום שווה למחצית מגילו של איציק. בעוד 10 שנים יהיה גילו של שלומי שלושה רבעים מגילו של איציק.

מה גילו של איציק היום (בשנים)?

פתרון: דרך א': בדיקת תשובות

נשאלנו על גילו של איציק, ובתשובות המוצעות מופיעים מספרים נוחים. לכן, נוכל לבדוק את התשובות. מכיוון שנשאלנו על גילו של איציק היום, התשובות מתייחסות לגילו של איציק היום. בעזרת גילו של איציק נמצא את גילו של שלומי היום. לבסוף נבדוק האם גילו של שלומי בעוד 10 שנים שווה לשלושה רבעים מגילו של איציק עוד 10 שנים. התשובה הנכונה היא זו שתקיים נתון זה.

תשובה (1): 10. לפי תשובה זו, גילו של איציק היום הוא 10. ידוע כי גילו של שלומי שווה למחצית

מגילו של איציק. מכאן שגילו של שלומי הוא $5 \left(\frac{10}{2} = 5 \right)$.

אם איציק היום בן 10, הרי שבעוד 10 שנים הוא יהיה בן 20 $(10 + 10 = 20)$.

אם גילו של שלומי הוא 5, הרי שבעוד 10 שנים יהיה גילו 15 $(5 + 10 = 15)$.

נבדוק האם גילו של שלומי בעוד 10 שנים הוא אכן שלושה רבעים מגילו של איציק בעוד 10

שנים: 15 הם אכן שלושה רבעים מתוך 20 $\left(\frac{15}{20} = \frac{3}{4} \right)$. לכן זוהי התשובה הנכונה.

דרך ב': בניית משוואה

נשאלנו מהו גילו של איציק היום, ולכן נגדיר את גילו של איציק היום בתור x .

ידוע כי גילו של שלומי היום שווה למחצית מגילו של איציק. מכאן שגילו של שלומי היום הוא $\frac{x}{2}$.

ידוע כי בעוד 10 שנים גילו של שלומי יהווה שלושה רבעים מגילו של איציק. הגדרנו את גילו של איציק

היום בתור x , ומצאנו כי גילו של שלומי היום הוא $\frac{x}{2}$. מכאן שבעוד 10 שנים יהיה גילו של איציק

$(x + 10)$, וגילו של שלומי יהיה $\left(\frac{x}{2} + 10 \right)$.

אם גילו של שלומי בעוד 10 שנים יהיה שלושה רבעים מגילו של איציק, הרי שניתן לבנות את המשוואה:

$$\frac{x}{2} + 10 = \frac{3}{4}(x + 10)$$

נכפול את שני צדי המשוואה ב-4, ונקבל: $\frac{x}{2} + 10 = \frac{3}{4}(x + 10) \Leftrightarrow 2x + 40 = 3(x + 10)$.

נפתח סוגריים, ונקבל: $2x + 40 = 3(x + 10) \Leftrightarrow 2x + 40 = 3x + 30$.

נחסר $(2x + 30)$ משני צדי המשוואה, ונקבל: $2x + 40 = 3x + 30 \Leftrightarrow x = 10$.

התשובה (1).

17. השאלה: נפח גליל הוא 12 סמ"ק. הגדילו את רדיוס הבסיס פי 4 והקטינו את הגובה פי 4.

מה נפח הגליל לאחר השינויים (בסמ"ק)?

פתרון: דרך א': הצבת דוגמה מספרית

לא נשאלנו על אורך רדיוס בסיס הגליל, או על גובהו, ולכן נוכל להציב מספרים במקומם. ידוע כי נפח הגליל לפני השינויים הוא 12 סמ"ק. לפי הנוסחה לחישוב נפח גליל, נפח גליל שווה למכפלת שטח בסיסו בגובהו. לפיכך, נתקשה לחשוב על שני מספרים, עבור רדיוס המעגל וגובהו, כך שנפח הגליל יהיה שווה ל-12 סמ"ק. לכן נעדיף להציב מספר רק עבור אחד מהגורמים (רדיוס או גובה), ובעזרת הנוסחה לחישוב הנפח נמצא את השני.

נבחר להציב כי רדיוס בסיס הגליל שווה ל-1 ס"מ. כאמור, נפח גליל שווה לשטח בסיסו כפול גובהו.

נסמן את גובה הגליל ב-h. מכאן שנפח הגליל שווה ל: $1^2 \pi \cdot h \Leftrightarrow \pi h$.

נתון כי נפח הגליל שווה ל-12 סמ"ק, ומכאן ש: $\pi h = 12$.

נחלק את שני צדי המשוואה ב- π , ונקבל: $h = \frac{12}{\pi}$.

כעת נמצא את נפח הגליל לאחר השינויים:

ידוע כי הגדילו את רדיוס בסיס הגליל פי 4. הצבנו כי אורך רדיוס בסיס הגליל לפני השינוי שווה ל-1

ס"מ. מכאן שאורך רדיוס הגליל כעת שווה ל-4 ס"מ ($1 \cdot 4 =$).

ידוע כי הקטינו את גובה הגליל פי 4. מצאנו שאורך גובה הגליל לפני השינוי הוא $\frac{12}{\pi}$ ס"מ. מכאן

$$\text{שאורך גובה הגליל לאחר השינוי הוא } \frac{3}{\pi} \text{ ס"מ} \left(\frac{\frac{12}{\pi}}{4} = \frac{12}{\pi} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{\pi} \right)$$

לפיכך, נפח הגליל לאחר השינויים שווה ל: $r^2 \pi \cdot h \Leftrightarrow 4^2 \pi \cdot \frac{3}{\pi} \Leftrightarrow 16 \cdot 3 \Leftrightarrow 48$.

לסיכום: מצאנו שלאחר השינויים נפח הגליל הוא 48 סמ"ק.

דרך ב': פישוט אלגברי

נסמן את רדיוס בסיס הגליל לפני השינוי ב-r, ואת גובה הגליל לפני השינוי ב-h. לפי הנוסחה לחישוב

נפח גליל, נפח גליל שווה למכפלת שטח בסיסו בגובהו. מכאן שנפח הגליל לפני השינויים שווה ל:

$$r^2 \pi \cdot h \quad \text{ידוע כי נפח הגליל לפני השינויים היה 12 סמ"ק, ועל כן: } r^2 \pi \cdot h = 12$$

לאחר השינויים רדיוס בסיס הגליל גדל פי 4. מכאן שכעת רדיוס בסיס הגליל שווה ל-4r.

כמו כן, לאחר גובה הגליל קטן פי 4. מכאן שכעת גובה הגליל שווה ל- $\frac{h}{4}$.

$$\text{לפיכך, לפי הנוסחה לחישוב נפח גליל, נפח הגליל שווה ל: } (4r)^2 \pi \cdot \frac{h}{4} \Leftrightarrow 16r^2 \pi \cdot \frac{h}{4} \Leftrightarrow 4r^2 \pi h$$

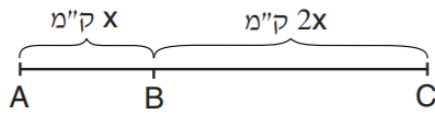
מצאנו שנפח הגליל המקורי היה $r^2 \pi \cdot h$ ולאחר השינויים הוא $4r^2 \pi h$. לפיכך, נפח הגליל לאחר

השינויים גדל פי 4 $\left(\frac{4r^2 \pi h}{r^2 \pi h} = 4 \right)$. נפח הגליל היה 12 סמ"ק, על כן, לאחר השינויים, נפח הגליל שווה

ל-48 סמ"ק ($12 \cdot 4 =$).

תשובה (4).

18. השאלה: המרחק בין A ל-B הוא x ק"מ, והמרחק בין B ל-C הוא $2x$ ק"מ (ראו סרטוט).



רוני רץ מ-A ל-B במהירות 9 קמ"ש.

מיד לאחר שהגיע רוני ל-B, המשיך ל-C במהירות 6 קמ"ש.

זמן ריצתו הכולל מ-A ל-C היה שעה.

כמה זמן נמשכה ריצתו של רוני מ-A ל-B?

פתרון: דרך א': בניית משוואה

עלינו למצוא כמה זמן ארכה ריצתו של רוני מ-A ל-B. נתונה מהירות הריצה של רוני בקמ"ש, ולכן אם נדע מהו המרחק בק"מ בין A ל-B, נוכל למצוא את זמן הריצה בעזרת נוסחת המהירות. כלומר, עלינו למצוא את x .

ידוע כי זמן הריצה הכולל מ-A ל-C הוא שעה. בעזרת המידע שבשאלה, ובעזרת נוסחת המהירות, נבטא באמצעות x את זמן הריצה בכל חלק של הדרך. לבסוף נבנה משוואה לפיה זמן הריצה הכולל הוא שעה.

זמן הריצה מ-A ל-B:

ידוע כי רוני רץ מ-A ל-B במהירות של 9 קמ"ש. כמו כן, ידוע כי המרחק בין A ל-B הוא x ק"מ. על פי נוסחת המהירות, הזמן כפול המהירות שווה לאורך הדרך. נסמן את זמן הריצה מ-A ל-B ב- a .

$$a \cdot 9 = x$$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-9, ונקבל: $a = \frac{x}{9}$

זמן הריצה מ-B ל-C:

ידוע כי רוני רץ מ-B ל-C במהירות של 6 קמ"ש. כמו כן, ידוע כי המרחק בין B ל-C הוא $2x$ ק"מ. לפי נוסחת המהירות, הזמן כפול המהירות שווה לאורך הדרך. נסמן את זמן הריצה מ-B ל-C ב- b .

$$b \cdot 6 = 2x$$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-6, ונקבל: $b = \frac{2x}{6} \Leftrightarrow b = \frac{x}{3}$

לסיכום: מצאנו כי זמן הריצה מ-A ל-B ערך $\frac{x}{9}$ שעות, וכי זמן הריצה מ-B ל-C ערך $\frac{x}{3}$ שעות.

ידוע כי זמן הריצה הכולל מ-A ל-C ערך שעה אחת. מכאן נוכל לבנות את המשוואה הבאה:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{9} = 1$$

נכפול את שני צדי המשוואה ב-9, ונקבל: $\frac{x}{3} + \frac{x}{9} = 1 \Leftrightarrow 3x + x = 9 \Leftrightarrow 4x = 9$

נחלק את שני צדי המשוואה ב-4, ונקבל: $4x = 9 \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

מצאנו כי זמן הריצה מ-A ל-B הוא $\frac{x}{9}$ שעות, וכי $x = \frac{9}{4}$. מכאן שזמן הריצה מ-A ל-B (בשעות) שווה

$$\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{9} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{4}$$

מצאנו שלרוני לקח $\frac{1}{4}$ שעה לרוץ מ-A ל-B. בשעה יש 60 דקות, ומכאן שזמן הריצה מ-A ל-B הוא 15

$$\text{דקות} \left(\frac{1}{4} \cdot 60 = \right)$$

דוג' ב': יחסים

על פי נתוני השאלה, המרחק בין A ל-B הוא x , והמרחק בין B ל-C הוא $2x$. לפיכך, הדרך מ-B ל-C ארוכה פי 2 מהדרך מ-A ל-B. $\left(\frac{2x}{x} = 2\right)$. אם רוני היה רץ באותה מהירות לאורך כל הדרך, הרי שהדרך מ-B ל-C הייתה אורכת פי 2 יותר זמן מאשר הדרך מ-A ל-B.

על פי הנתונים, מהירות הריצה של רוני מ-A ל-B היא 9 קמ"ש, ומהירות הריצה שלו מ-B ל-C היא 6 קמ"ש. לפיכך, מהירות הריצה מ-A ל-B גדולה פי $\frac{3}{2}$ ממהירות הריצה מ-B ל-C. $\left(\frac{9}{6} = \frac{3}{2}\right)$. קיים יחס הפוך בין המהירות לבין הזמן. כלומר, אם המהירות גדולה יותר אז זמן הריצה מתקצר. לפיכך, אם המרחק בין A ל-B היה זהה למרחק בין B ל-C, הרי שלרוני היה לוקח פי $\frac{3}{2}$ זמן להגיע מ-B ל-C.

לפי המרחק, מצאנו כי זמן הריצה מ-B ל-C ארוך פי 2.
לפי מהירות הריצה, מצאנו כי זמן הריצה מ-B ל-C ארוך פי $\frac{3}{2}$.
מכאן שזמן הריצה מ-B ל-C ארוך יותר מזמן הריצה מ-A ל-B פי 2 וגם פי $\frac{3}{2}$.
לפיכך זמן הריצה בין B ל-C ארוך פי: $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

לסיכום: מצאנו שזמן הריצה מ-B ל-C ארוך פי 3 מזמן הריצה מ-A ל-B.
ידוע כי זמן הריצה הכולל מ-A ל-C הוא שעה. בשעה יש 60 דקות. מכאן שכדי למצוא את זמן הריצה מ-A ל-B עלינו למצוא שני פרקי זמן השווים בסך הכול ל-60 דקות, ושהיחס ביניהם הוא 1:3. ניתן להיעזר במשוואה על מנת למצוא את הזמן, או לנסות ולשחק עם המספרים. המספרים המתאימים הם 45 דקות ו-15 דקות. $\left(\frac{15}{45} = \frac{1}{3}\right)$.
מכאן שזמן הריצה מ-B ל-C הוא 45 דקות, וזמן הריצה מ-A ל-B הוא 15 דקות.

תשובה (4).

19.

השאלה: ליובל יש חמש לבנים שגודליהן שונים זה מזה. הוא מעוניין לקחת ארבע מהן ולהניחן זו על גבי זו באופן שכל לבנה (החל מהלבנה השנייה) תהיה קטנה מהלבנה שמתחתיה.

בכמה דרכים יוכל ליובל לעשות זאת?

פתרון: זוהי שאלת צירופים. בתשובות מופיעים מספרים גדולים וקטנים ולכן קשה להחליט בשלב זה האם כדאי לפתור את השאלה בעזרת ספירה ידנית או חישוב אלגברי. לכן, ננסה לחשוב על דוגמה אחת המקיימת את הנתונים, ולאחר מכן נחליט על דרך הפתרון.

כדי להקל על פתרון השאלה, נמספר את חמשת הלבנים לפי הגודל שלהן. כך, הלבנה הקטנה ביותר תהיה לבנה מספר 1, הלבנה השנייה בגודלה תהיה לבנה מספר 2, וכך הלאה, עד שהלבנה הגדולה ביותר תהיה לבנה מספר 5.

יובל צריך לסדר ארבע לבנים זו על גבי זו, כאשר יש בידיו חמש לבנים. נתחיל ממקרה בו יובל משמיט את הלבנה הקטנה ביותר, את לבנה מספר 1. יובל צריך לסדר את לבנים מספר 2 עד 5 כך שכל לבנה תהיה קטנה מהלבנה שמתחתיה. במצב כזה, הוא יכול לסדר את הלבנים רק בדרך אחת:

5 ← 4 ← 3 ← 2.

נבדוק מקרה נוסף:

כעת יובל ישמיט את לבנה מספר 2. במצב כזה יובל צריך לסדר את לבנים מספר 1, 3, 4 ו-5, כך שכל לבנה תהיה קטנה מהלבנה שמתחתיה. גם כעת יובל יכול לסדר את הלבנים רק בדרך אחת:

5 ← 4 ← 3 ← 1.

כעת ניתן להבין, כי בכל אחת מן האפשרויות לסידור הלבנים, יובל לא משתמש בלבנה אחת. כאשר הוא עושה זאת יש רק סידור אחד אפשרי אשר מקיים את הנתונים. מכאן, שמספר האפשרויות שיש ליובל לסדר 4 לבנים שווה למספר הלבנים שהוא יכול להשמיט. מכיוון שליובל יש 5 לבנים, הרי שבכל פעם הוא ישמיט אחת מן הלבנים האלה. כלומר יובל יכול להשמיט 5 לבנים, ובכל פעם שהוא משמיט לבנה יהיה רק סידור אחד אפשרי. לפיכך, ליובל יש 5 אפשרויות שונות לסדר 4 לבנים באופן המתואר בנתונים.

הערה: בבחירת ארבע לבנים מתוך חמש נוכל להסתכל על הלבנה אותה לא מסדרים במגדל הלבנים. בכל בחירה של ארבע לבנים ישנה לבנה אחת שיוכל לא מסדר. ולכן ליובל יש חמש אפשרויות לבחור את האבן אותה הוא לא מסדר.

תשובה (2).

20. השאלה: מה ספרת האחדות של המספר 2^{20} ?

פתרון: זוהי שאלה שבה כביכול נדרש שימוש במחשבון. אולם, עלינו למצוא רק את ספרת האחדות של המספר הנתון. לכן, לא באמת צריך לחשב את תוצאת המספר הנתון, אלא רק להבין מהי ספרת האחדות שלו. יש כמה דרכים למצוא את ספרת האחדות של המספר. על פי גישה אחת, כאשר בשאלה מופיעים חישובים מורכבים, ננסה למצוא חוקיות כלשהי. במקרה של השאלה הזו, ננסה לראות אם לחזקות של 2 יש חוקיות.

נראה מה קורה לספרת האחדות בחזקות הולכות ועולות של 2:

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

$$2^5 = 32 \text{ ספרת האחדות היא } 2, \text{ בדומה ל-} 2^1$$

$$2^6 = 64 \text{ ספרת האחדות היא } 4, \text{ בדומה ל-} 2^2$$

$$2^7 = 128 \text{ ספרת האחדות היא } 8, \text{ בדומה ל-} 2^3$$

$$2^8 = 256 \text{ ספרת האחדות היא } 6, \text{ בדומה ל-} 2^4$$

מכאן ניתן לראות כי לספרת האחדות של חזקה של 2 יש חוקיות. ספרת האחדות חוזרת על עצמה כל 4 מעריכים. בתחילה ספרת האחדות היא 2, לאחר מכן 4, לאחר מכן 8 ולבסוף 6, וחוזר חלילה. בעזרת החוקיות נוכל למצוא את ספרת האחדות של 2^{20} . הראנו באופן ידני כי ספרת האחדות של 2^8 היא 6. לכן, נמצא את ספרת האחדות של 2^{20} בספירה ידנית מ- 2^8 .

לפי החוקיות, ספרת האחדות של 2^9 היא 2; ספרת האחדות של 2^{10} היא 4; ספרת האחדות של 2^{11} היא 8; ספרת האחדות של 2^{12} היא 6; ספרת האחדות של 2^{13} היא 2; ספרת האחדות של 2^{14} היא 4; ספרת האחדות של 2^{15} היא 8; ספרת האחדות של 2^{16} היא 6; ספרת האחדות של 2^{17} היא 2; ספרת האחדות של 2^{18} היא 4; ספרת האחדות של 2^{19} היא 8; וספרת האחדות של 2^{20} היא 6.

על פי גישה אחרת, ניתן לפתור את השאלה ללא הבנת החוקיות. על פי גישה זו, נמצא את ספרת האחדות של 2^{20} על ידי פירוקו לכפולות של מספרים שניתן לחשב. את הפירוק נעשה בעזרת חוקי חזקות, ולפיהן: $x^{m+n} = x^m \cdot x^n$.

$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} \text{ או } 2^{20} = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5$$

ניתן כמובן לפרק את 2^{20} במגוון דרכים נוספות, אולם נבחר את הדרך הקצרה ביותר, כלומר זו שבה נצטרך לחשב הכי פחות מספרים. מכיוון שלא כולם יודעים בעל פה את התוצאה של 2^{10} נעדיף להמשיך את הפתרון עם האפשרות השנייה לפירוק: $2^{20} = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5$.

$$2^5 = 32, \text{ ומכאן ש: } 2^{20} = 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \cdot 2^5 \Leftrightarrow 2^{20} = 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$$

בכפל, ספרת האחדות של התוצאה היא ספרת האחדות של תוצאת המכפלה של כל ספרות האחדות של המשתתפים במכפלה. כלומר, ספרת האחדות של 2^{20} תהיה ספרת האחדות של תוצאת התרגיל $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

אנו יודעים כי $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, כלומר ספרת האחדות של התוצאה היא 6. לפיכך ספרת האחדות של המספר 2^{20} גם היא שווה ל-6.

תשובה (3).