

מפתח תשובות נכונות

שאלה	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
תשובה	(3)	(2)	(1)	(3)	(3)	(4)	(4)	(2)	(1)	(1)

שאלה	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
תשובה	(3)	(4)	(2)	(3)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(1)

הסברים

שאלות ובעיות (שאלות 1-8)

שאלה 1 - בעיה מילולית - חלוקת סוכריות

השאלה: אם מחלקים שווה בשווה y סוכריות בין 2 ילדים, נשארת סוכריה אחת עודפת. אם מחלקים שווה בשווה y סוכריות בין 3 ילדים, נשארת סוכריה אחת עודפת. אם מחלקים שווה בשווה y סוכריות בין 4 ילדים, נשארת סוכריה אחת. y יכול להיות שווה ל-
אחת עודפת. אם מחלקים שווה בשווה y סוכריות בין 4 ילדים, נשארת סוכריה אחת. y יכול להיות שווה ל-

פיתרון:

מה אומרים הנתונים? y נותן שארית 1 בחלוקה ב-2, ב-3 וב-4. נבדוק כל תשובה.

תשובה (1) - 7

אם נחלק 7 סוכריות בין 2 ילדים, כל אחד יקבל 3 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון הראשון.
אם נחלק 7 סוכריות בין 3 ילדים, כל אחד יקבל 2 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון השני.
אם נחלק 7 סוכריות בין 4 ילדים, כל אחד יקבל סוכריה אחת ויישאר 3 סוכריות עודפות. לא מתאים לנתון השלישי!

תשובה (2) - 11

אם נחלק 11 סוכריות בין 2 ילדים, כל אחד יקבל 5 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון הראשון.
אם נחלק 11 סוכריות בין 3 ילדים, כל אחד יקבל 3 סוכריות ויישאר 2 סוכריות עודפות. לא מתאים לנתון השני!

תשובה (3) - 13

אם נחלק 13 סוכריות בין 2 ילדים, כל אחד יקבל 6 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון הראשון.
אם נחלק 13 סוכריות בין 3 ילדים, כל אחד יקבל 4 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון השני.
אם נחלק 13 סוכריות בין 4 ילדים, כל אחד יקבל 3 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון השלישי.
מתאים לכל הנתונים!

תשובה (4) - 17

אם נחלק 17 סוכריות בין 2 ילדים, כל אחד יקבל 8 סוכריות ותישאר סוכריה אחת עודפת. מתאים לנתון הראשון.
אם נחלק 17 סוכריות בין 3 ילדים, כל אחד יקבל 5 סוכריות ויישאר 2 סוכריות עודפות. לא מתאים לנתון השני!

תשובה (3).



שאלה 2 - אלגברה - הצבה

השאלה: נתון: $x = 2y$. מהו $(x - y)^2$?

פיתרון:

הצבת הנתון:

נציב $2y$ במקום x בביטוי:

$$(2y - y)^2 = y^2$$

תשובה (2).

שאלה 3 - גיאומטריה - מגדל קוביות

השאלה: ליאת בנתה מגדל מקוביות באופן הבא: היא הניחה קובייה ראשונה בנפח 125 סמ"ק, מעליה הניחה קובייה שנייה שמקצועה קטן בס"מ אחד ממקצוע הקובייה הראשונה, מעל הקובייה השנייה הניחה קובייה שלישית שמקצועה קטן בס"מ אחד ממקצוע הקובייה השנייה, וכן הלאה. מה נפח הקובייה הרביעית שהניחה ליאת (בסמ"ק)?

פיתרון:

נוסחת נפח קובייה:

$$a^3 = \text{נפח הקובייה}$$

כלומר, נפח קובייה שווה לאורך המקצוע בחזקת 3 (מקצוע כפול מקצוע כפול מקצוע).

מציאת אורך המקצוע של הקובייה הראשונה:

נתון שנפח הקובייה הראשונה הוא 125 סמ"ק. אנחנו יודעים שהנפח שווה למקצוע בחזקת 3, לכן נשאל: איזה מספר בחזקת 3 נותן 125?

$$5^3 = 125$$

אורך המקצוע של הקובייה הראשונה הוא 5 ס"מ.

מציאת אורכי המקצועות של שאר הקוביות:

כל קובייה קטנה ב-1 ס"מ מהקודמת:

קובייה ראשונה: מקצוע 5 ס"מ.

קובייה שנייה: מקצוע 4 ס"מ.

קובייה שלישית: מקצוע 3 ס"מ.

קובייה רביעית: מקצוע 2 ס"מ.

חישוב נפח הקובייה הרביעית:

$$2^3 = 8$$

נפח הקובייה הרביעית הוא 8 סמ"ק.

תשובה (1).



שאלה 4 - אלגברה - ממוצעים

השאלה: w, x, y ו- z הם ארבעה מספרים חיוביים ושונים זה מזה. נתון: m הוא הממוצע של w ו- x , $5m$ הוא הממוצע של y ו- z . מהו הממוצע של w, x, y ו- z ?

פיתרון:

תובנה חשובה:

כדי לחשב ממוצע של ארבעה מספרים, צריך לדעת את הסכום שלהם. לכן נמצא את הסכומים מתוך הנתונים.

מציאת הסכום של w ו- x :

נתון ש- m הוא הממוצע של w ו- x , כלומר:

$$\frac{w+x}{2} = m$$

נכפיל את שני האגפים ב-2:

$$w+x = 2m$$

מציאת הסכום של y ו- z :

נתון ש- $5m$ הוא הממוצע של y ו- z , כלומר:

$$\frac{y+z}{2} = 5m$$

נכפיל את שני האגפים ב-2:

$$y+z = 10m$$

חישוב הממוצע של ארבעת המספרים:

הממוצע של w, x, y ו- z הוא הסכום שלהם חלקי 4:

$$\frac{w+x+y+z}{4} = \frac{2m+10m}{4} = \frac{12m}{4} = 3m$$

תשובה (3).

שאלה 5 - אלגברה - חזקות

השאלה: נתון: $a^{2x} = 8$, $a > 0$. מהו a^x ?

פיתרון:

תובנה חשובה:

לפי חוקי חזקות, אפשר לכתוב את $a^{2x} = 8$ בצורה אחרת:

$$a^{2x} = (a^x)^2$$

הצבה במשוואה:

נציב ונקבל:

$$(a^x)^2 = 8$$

הוצאת שורש:

נוציא שורש משני האגפים. מכיוון ש- $a > 0$, גם a^x חיובי, לכן ניקח את השורש החיובי:

$$a^x = \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$$

תשובה (3).



שאלה 6 - אלגברה - זוגיות

השאלה: x, y ו- z הם מספרים שלמים ושונים מאפס: x אי-זוגיים, ו- z זוגי. איזה מהמספרים הבאים בהכרח אינו מספר שלם?

פיתרון:

כללים חשובים:

אי-זוגי + זוגי = אי-זוגי

אי-זוגי + אי-זוגי = זוגי

אי-זוגי $\times$ אי-זוגי = אי-זוגי

זוגי $\times$ אי-זוגי = זוגי

מספר אי-זוגי לא יכול להתחלק במספר זוגי ולתת תוצאה שלמה.

תשובה (1) - $\frac{x+z}{y}$

המונה: x אי-זוגי + z זוגי = אי-זוגי.

המכנה: y אי-זוגי.

אי-זוגי חלקי אי-זוגי יכול להיות שלם (למשל 3 חלקי 1 שווה 3).

תשובה (2) - $\frac{x+y+z}{z}$

המונה: x אי-זוגי + y אי-זוגי + z זוגי = זוגי + זוגי + זוגי = זוגי.

המכנה: z זוגי.

זוגי חלקי זוגי יכול להיות שלם (למשל 4 חלקי 2 שווה 2).

תשובה (3) - $\frac{zx}{y}$

המונה: z זוגי $\times$ אי-זוגי = זוגי.

המכנה: y אי-זוגי.

זוגי חלקי אי-זוגי יכול להיות שלם (למשל 6 חלקי 3 שווה 2).

תשובה (4) - $\frac{xy+z}{z}$

המונה: x אי-זוגי $\times$ y אי-זוגי = אי-זוגי. אי-זוגי + z זוגי = אי-זוגי.

המכנה: z זוגי.

מספר אי-זוגי לא יכול להתחלק במספר זוגי ולתת תוצאה שלמה. בהכרח אינו שלם!

תשובה (4).



שאלה 7 - גיאומטריה - מקבילית ומשולשים חופפים

השאלה: בסרטוט שלפניכם $ABCD$ היא מקבילית. נתון: המשולש FED חופף למשולש CED . שטח המקבילית $ABCD$ הוא 8 סמ"ר. מה שטח המשולש הכהה FAD (בסמ"ר)?

פיתרון:

מידע מהסרטוט:

מהסרטוט רואים שזווית DEC היא זווית ישרה (90°), כלומר EC ניצב ל- AD .

מסקנות מחפיפת המשולשים:

מכיוון שמשולש FED חופף למשולש CED , ולשניהם צלע משותפת ED , נובע ש- $EF = EC$ וגם שזווית FED שווה לזווית CED , כלומר שתיהן 90° .

תובנה חשובה:

EC הוא הגובה של המקבילית מ- C לצלע AD . מכיוון ש- $EF = EC$, גם EF הוא גובה באותו אורך, והוא ניצב ל- AD . כלומר, למשולש FAD ולמקבילית $ABCD$ יש אותו בסיס AD ואותו גובה.

שטח המקבילית:

שטח מקבילית שווה לבסיס כפול גובה:

$$AD \times EC = 8$$

שטח משולש FAD :

הבסיס הוא AD והגובה הוא EF (שניצב ל- AD).

$$\frac{1}{2} \times AD \times EF = \frac{1}{2} \times AD \times EC = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

תשובה (4).

שאלה 8 - בעיה מילולית - מסלול מעגלי

השאלה: מכונית נוסעת במהירות קבועה של 60 קמ"ש במסלול מעגלי שהיקפו 80 ק"מ. מה גודל הזווית המרכזית הנשענת על הקשת שהמכונית עוברת בנסיעה של 10 דקות?

פיתרון:

מציאת המרחק שהמכונית עוברת ב-10 דקות:

מהירות המכונית היא 60 קמ"ש, כלומר 60 ק"מ בשעה. 10 דקות הן $\frac{1}{6}$ שעה, לכן המכונית עוברת 10 ק"מ.

תובנה חשובה:

יש קשר ישיר בין אורך קשת במעגל לבין הזווית המרכזית שנשענת עליה: אם הקשת היא חלק מסוים מההיקף, אז גם הזווית המרכזית היא אותו חלק מ- 360° . לכן נמצא איזה חלק מההיקף המכונית עברה כדי לגלות מהי הזווית המרכזית הנשענת עליו.

מציאת החלק מההיקף:

המכונית עברה 10 ק"מ מתוך היקף של 80 ק"מ:

$$\frac{10}{80} = \frac{1}{8}$$

חישוב הזווית המרכזית:

המכונית עברה $\frac{1}{8}$ מההיקף, לכן הזווית המרכזית היא $\frac{1}{8}$ מ- 360° :

$$360^\circ \times \frac{1}{8} = 45^\circ$$

תשובה (2).



הסקה מטבלה (שאלות 9-12)

שאלה 9 - תרשים טורניר - ספירת תיקו

השאלה: איזה מהשחקנים הבאים סיים את המספר הגדול ביותר של משחקים בתיקו?

פיתרון:

איך מזהים תיקו?

אם שחקן ממשיך לשחק באותו שלב ולא מתקדם לשלב הבא, זה אומר שהמשחק הקודם הסתיים בתיקו.

ספירת התיקו של כל שחקן:

שחקן A: שתי תוצאות תיקו בשלב הראשון ועוד אחת בשלב השני. סך הכל 3 תיקו.

שחקן E: תיקו אחד בשלב השני ותיקו אחד בשלב השלישי. סך הכל 2 תיקו.

שחקן F: תיקו אחד בשלב הראשון בלבד. סך הכל תיקו אחד.

שחקן H: תיקו אחד בשלב הראשון בלבד. סך הכל תיקו אחד.

מסקנה:

השחקן עם הכי הרבה תוצאות תיקו הוא A, עם 3 משחקים שהסתיימו בתיקו.

תשובה (1).

שאלה 10 - תרשים טורניר - משך משחק

השאלה: כמה זמן נמשך המשחק שבו הפסיד שחקן E?

פיתרון:

איך מוצאים את המשחק שבו הפסיד שחקן?

מחפשים את המשחק האחרון שלו בטורניר. אם השחקן לא הגיע לגביע, המשחק האחרון שלו הוא בהכרח המשחק שבו הפסיד ויצא מהטורניר.

מציאת המשחק האחרון של שחקן E:

המשחק האחרון של שחקן E מסומן בריבוע לבן (ללא נקודות).

פענוח לפי המקרא:

לפי המקרא, ריבוע לבן מסמן משחק שנמשך פחות משעה.

תשובה (1).

שאלה 11 - תרשים טורניר - פרס ניחומים

השאלה: אחד מהשחקנים שהודחו בשלב הראשון של הטורניר זכה בפרס ניחומים ממארגני התחרות. ידוע כי הזוכה בפרס הניחומים שיחק בשלב הראשון מול שחקן שהעפיל לשלב השלישי של הטורניר. איזה מהשחקנים הבאים יכול להיות הזוכה בפרס הניחומים?

פיתרון:

אסטרטגיית פתרון:

נחפש שחקן שעונה על שני תנאים: (א) הודח דווקא בשלב הראשון, ו-(ב) יריבו בשלב הראשון העפיל עד לשלב השלישי. לשם כך, נזהה תחילה מי הם השחקנים שהעפילו לשלב השלישי, ואז נבדוק לכל מועמד אם הוא הודח בשלב הראשון ומי היה יריבו באותו שלב.

זיהוי השחקנים שהעפילו לשלב השלישי:

מהתנאים רואים שהשלב השלישי (המעגל הפנימי) מורכב משני שחקנים - המנצח בטורניר ושחקן נוסף שהפסיד בגמר. לפי התנאים, השחקנים שהגיעו לשלב השלישי הם A ו- B .

זיהוי זוגות בשלב הראשון:

משך המשחק של שני יריבים באותו משחק זהה. לפי הדוגמה שבהוראות, D ו- G שיחקו זה מול זה בשלב הראשון - שניהם שיחקו משחק אחד בשלב זה שנמשך יותר מ-3 שעות. מהתנאים רואים ש- G ניצח במשחק זה והעפיל לשלב השני (שם הודח), בעוד ש- D הודח בשלב הראשון.

בדיקת תשובה (1) - C :

לפי התנאים, C העפיל מעבר לשלב הראשון ושיחק יותר ממשחק אחד בטורניר. לכן C לא הודח בשלב הראשון ואינו יכול להיות הזוכה בפרס הניחומים.

בדיקת תשובה (2) - D :

D הודח בשלב הראשון מול G . כעת יש לבדוק אם יריבו G העפיל לשלב השלישי. מהתנאים, G העפיל לשלב השני בלבד (שם הודח), ולא הגיע לשלב השלישי. לכן D אינו יכול להיות הזוכה בפרס הניחומים.

בדיקת תשובה (3) - F :

F הודח בשלב הראשון (שיחק משחק אחד בלבד בטורניר). לפי התנאים, יריבו של F בשלב הראשון היה B , שהעפיל לשלב השלישי. F עונה על שני התנאים ויכול להיות הזוכה בפרס הניחומים!

בדיקת תשובה (4) - G :

G לא הודח בשלב הראשון - הוא ניצח את D והעפיל לשלב השני, שם הודח. מאחר שפרס הניחומים מיועד רק לשחקנים שהודחו בשלב הראשון, G אינו יכול להיות הזוכה.

תשובה (3).

שאלה 12 - תרשים טורניר - מי סיים ראשון

השאלה: ידוע כי בשלב הראשון של הטורניר כל השחקנים החלו לשחק באותו הרגע, וכל זוג שחקנים מתחרים המשיך לשחק ברצף עד שאחד מהם ניצח. איזה מהשחקנים הבאים סיים לשחק הכי מוקדם בשלב הראשון של הטורניר?

פיתרון:

אסטרטגיית פתרון:

נבדוק כמה זמן כל שחקן שיחק בשלב הראשון, ונראה מי סיים הכי מהר.

שחקן D:

שיחק משחק אחד שנמשך מעל 3 שעות. כלומר סיים אחרי יותר מ-3 שעות.

שחקן E:

שיחק משחק אחד שנמשך בין שתיים ל-3 שעות. כלומר סיים אחרי יותר משעתיים ולא יותר משלוש שעות.

שחקן F:

שיחק שני משחקים - אחד בין שעה לשעתיים, והשני פחות משעה. כלומר סיים אחרי שעה-ומשהו עד כמעט 3 שעות.

השוואה:

D בוודאות לא סיים ראשון (מעל 3 שעות).

אבל בין E ל-F אי אפשר לדעת:

E יכול היה לסיים אחרי שעתיים ורבע, ו-F אחרי שעתיים וחצי (שעה ו-45 דקות במשחק הראשון ועוד 45 דקות במשחק השני) - אז E סיים קודם.
E יכול היה לסיים אחרי שעתיים ושלוש רבעי שעה, ו-F אחרי שעה וחצי (שעה ורבע במשחק הראשון ועוד רבע שעה במשחק השני) - אז F סיים קודם.

לכן, לא ניתן להכריע מי סיים לשחק ראשון בשלב הראשון.

תשובה (4).

שאלות ובעיות (שאלות 13-20)

שאלה 13 - בעיה מילולית - כדורים בכד

השאלה: בתוך כד נמצאים כדורים בצבעים שונים. 50% מהכדורים ירוקים, ו-25% מהכדורים אדומים. 20% מהכדורים שאינם ירוקים הם צהובים. איזה אחוז מהכדורים בכד, לכל היותר, הם כחולים?

פיתרון:

טיפ:

כשעובדים עם אחוזים, נוח להציב מספר. נניח שיש בכד 100 כדורים.

חישוב מספר הכדורים מכל צבע:

50% מהכדורים ירוקים = 50 כדורים ירוקים.

25% מהכדורים אדומים = 25 כדורים אדומים.

חישוב מספר הכדורים הצהובים:

הכדורים שאינם ירוקים:

$$100 - 50 = 50$$

20% זה בעצם חמישית, לכן מספר הכדורים הצהובים:

$$50 \div 5 = 10$$

כלומר יש 10 כדורים צהובים.



חישוב מספר הכדורים הכחולים:

סך כל הכדורים שהם בוודאות לא כחולים (ירוקים + אדומים + צהובים):

$$50 + 25 + 10 = 85$$

כל השאר יכולים להיות כחולים:

$$100 - 85 = 15$$

15 כדורים מתוך 100 זה 15%, לכן לכל היותר 15% מהכדורים יכולים להיות כחולים.

תשובה (2).

שאלה 14 - גיאומטריה - מלבנים מקוננים

השאלה: סביב מלבן $ABCD$ שהיקפו 16 ס"מ, נבנה מלבן $EFGH$. באופן שכל אחת מצלעות המלבן $EFGH$ רחוקה ב-1 ס"מ מהצלע המתאימה במלבן $ABCD$. מה היקף המלבן $EFGH$ (בס"מ)?

פיתרון:

תובנה חשובה:

אין לנו מידע על אורכי הצלעות של המלבן $ABCD$ עצמן, לכן אי אפשר לפענח את אורכי הצלעות של $EFGH$. נסמן את הצלעות במשתנים ונחשב את ההיקף.

הבנת הסרטוט:

כל פינה של המלבן $EFGH$ מרוחקת ב-1 ס"מ מכל אחת משתי הצלעות הסמוכות של המלבן $ABCD$.

סימון צלעות המלבן $ABCD$:

נסמן את אורך המלבן $ABCD$ ב- a ואת רוחבו ב- b . היקף המלבן הוא:

$$2a + 2b = 16$$

חישוב צלעות המלבן $EFGH$:

המלבן $EFGH$ גדול יותר - מוסיפים 1 ס"מ מכל צד:

אורך $EFGH$ הוא $a + 2$ (מוסיפים 1 ס"מ מכל צד).

רוחב $EFGH$ הוא $b + 2$ (מוסיפים 1 ס"מ מכל צד).

חישוב היקף המלבן $EFGH$:

$$2(a + 2) + 2(b + 2)$$

$$= 2a + 4 + 2b + 4$$

$$= 2a + 2b + 8$$

$$= 16 + 8 = 24$$

תשובה (3).



שאלה 15 - אלגברה - מספר דו-ספרתי

השאלה: A ו- B הן ספרות בין 1 ל-9. נתון: המספר הדו-ספרתי AB גדול פי 9 מסכום ספרותיו. כמה ערכים יכולים להיות למספר AB ?

פיתרון:

תובנה חשובה:

מאחר שהמספר AB גדול פי 9 מסכום ספרותיו, הוא חייב להיות כפולה של 9.

בדיקת כפולות של 9:

18: סכום הספרות $1 + 8 = 9$. האם 18 גדול פי 9 מסכום ספרותיו? לא, כי 9 כפול 9 זה 81.

27: סכום הספרות $2 + 7 = 9$. האם 27 גדול פי 9 מסכום ספרותיו? לא.

36: סכום הספרות $3 + 6 = 9$. האם 36 גדול פי 9 מסכום ספרותיו? לא.

זיהוי תבנית:

אם נמשיך לבדוק את שאר כפולות 9 הדו-ספרתיות, נגלה שבכולן סכום הספרות הוא 9. זוהי תכונה ידועה של כפולות 9.

מכאן נובע שאנחנו מחפשים מספר שסכום ספרותיו הוא 9, והמספר עצמו גדול פי 9 מסכום זה. כלומר, המספר חייב להיות:

$$9 \times 9 = 81$$

בדיקה:

נוודא, סכום הספרות הוא 9. האם 81 גדול פי 9 מ-9? כן! יש רק ערך אחד אפשרי: 81.

תשובה (1).



שאלה 16 - בעיה מילולית - משכורת ומיסים

השאלה: דרור עובד 100 שעות בחודש, משתכר 10 דולרים לשעה, ומשלם מיסים בסך 4% ממשכורתו. בחודש כלשהו שכרו של דרור עלה ל-20 דולרים לשעה, וכמו כן אחוז המיסים שהוא משלם עלה ל-20%. כמה שעות יצטרך דרור לעבוד מעתה בכל חודש כדי שמשכורתו, לאחר תשלום מיסים, לא תשתנה?

פיתרון:

תובנה חשובה:

כדי לחשב שכר חודשי, יש להכפיל את השכר השעתי בכמות השעות החודשיות.

חישוב המשכורת לאחר מס במצב המקורי:

דרור עובד 100 שעות בחודש כפול 10 דולרים לשעה, כלומר משכורתו היא 1000 דולרים.
מס 4% מ-1000 זה 40 דולרים.
משכורת לאחר מס: 1000 פחות 40 שווה 960 דולרים.

מה אנחנו מחפשים?

כמה שעות צריך דרור לעבוד במצב החדש (20 דולרים לשעה, 20% מס) כדי לקבל 960 דולרים לאחר מס. נבדוק את התשובות.

טיפ לחישוב 20%: נחלק ב-10 (כדי לקבל 10%) ונכפול ב-2.

תשובה (1) - 100 שעות:

100 כפול 20 שווה 2000 דולרים. מס 20%: 2000 חלקי 10 זה 200, כפול 2 זה 400. לאחר מס: 1600 דולרים. לא מתאים.

תשובה (2) - 80 שעות:

80 כפול 20 שווה 1600 דולרים. מס 20%: 1600 חלקי 10 זה 160, כפול 2 זה 320. לאחר מס: 1280 דולרים. לא מתאים.

תשובה (3) - 60 שעות:

60 כפול 20 שווה 1200 דולרים. מס 20%: 1200 חלקי 10 זה 120, כפול 2 זה 240. לאחר מס: 960 דולרים. מתאים!

מצאנו את התשובה הנכונה, לכן אין צורך להמשיך לבדוק.

תשובה (3).

שאלה 17 - בעיה מילולית - מדרגות

השאלה: ערן עמד על מדרגה כלשהי בגרם מדרגות. בכל דקה הוא טיפס 10 מדרגות או ירד מדרגה אחת. לאחר A דקות עמד ערן על מדרגה צמודה למדרגה שממנה התחיל להלך על המדרגות. איזה מן המספרים הבאים יכול להיות שווה ל-A?

פיתרון:

תובנה חשובה:

עלינו למצוא את מספר הדקות A שבסופן ערן עומד על מדרגה צמודה למדרגת ההתחלה - כלומר מדרגה אחת למעלה או מדרגה אחת למטה.

המקרה הפשוט ביותר:

אם ערן יורד מדרגה אחת בדקה הראשונה, הוא מייד מגיע למדרגה צמודה (אחת מתחת למדרגת ההתחלה). במקרה זה $A = 1$. אולם התשובה 1 אינה מופיעה בין התשובות, לכן נחפש אפשרויות אחרות.

מתי יש אפשרויות נוספות?

בכל מקרה אחר, ערן חייב לעלות 10 מדרגות לפחות פעם אחת (ואז לרדת מספר מדרגות מתאים). נבדוק את המקרה הפשוט הבא - ערן עולה 10 מדרגות פעם אחת.

אם עלה פעם אחת וסיים מדרגה אחת מעל ההתחלה:

ערן עלה 10 מדרגות, וכדי להגיע למדרגה 1 (אחת מעל ההתחלה) עליו לרדת 9 מדרגות.

סך הדקות: 1 (עלייה) + 9 (ירידות) = 10 דקות.

10 מופיע בין התשובות!

אם עלה פעם אחת וסיים מדרגה אחת מתחת להתחלה:

ערן עלה 10 מדרגות, וכדי להגיע למדרגה 1 – עליו לרדת 11 מדרגות.

סך הדקות: 1 (עלייה) + 11 (ירידות) = 12 דקות.

12 אינו מופיע בין התשובות.

מסקנה:

מבין התשובות (8, 9, 10, 11), רק 10 מתאים.

תשובה (3).

שאלה 18 - גיאומטריה - מעגל ומשולש

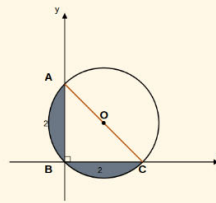
השאלה: במערכת הצירים שלפניכם מעגל שמרכזו O ואורך רדיוסו $\sqrt{2}$, העובר דרך ראשית הצירים. מה סכום שני השטחים הכהים?

פיתרון:

תוכנה חשובה:

נסמן ב- B את ראשית הצירים, ב- A את הנקודה שבה המעגל חותך את ציר ה- y החיובי, וב- C את הנקודה שבה המעגל חותך את ציר ה- x החיובי. נראה בהמשך שהמיתר AC הוא קוטר של המעגל, ולכן הוא מחלק את המעגל לשני חצאים שווים. החצי של המעגל שנמצא בצד B מורכב משני השטחים הכהים ועוד המשולש ABC , ולכן:

סכום השטחים הכהים = שטח חצי מעגל פחות שטח המשולש ABC .



בניית עזר: המיתר AC (הקוטר) והמשולש ABC

חישוב אורכי BA ו- BC :

המרכז O נמצא במרחק $\sqrt{2}$ (הרדיוס) מראשית הצירים B , והזווית בין OB לציר ה- x היא 45° (מהסרטוט). לכן O נמצא בנקודה $(1, 1)$.

A נמצא על ציר ה- y החיובי וגם על המעגל. המרחק בין $O = (1, 1)$ לבין $A = (0, y)$ שווה לרדיוס:

$$(0 - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$(y - 1)^2 = 1 \Rightarrow y = 2$$

כלומר $A = (0, 2)$, $BA = 2$. באופן דומה $C = (2, 0)$ ו- $BC = 2$.

הוכחה ש- AC הוא קוטר:

המשולש ABC ישר-זווית ב- B (הזווית בין ציר x לציר y היא 90°). לפי משפט פיתגורס:

$$AC^2 = BA^2 + BC^2 = 4 + 4 = 8$$

$$AC = 2\sqrt{2}$$

זהו בדיוק הקוטר (פעמיים הרדיוס: $2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$). לכן AC הוא קוטר של המעגל.

חישוב שטח חצי המעגל:

שטח המעגל השלם:

$$\pi \times (\sqrt{2})^2 = 2\pi$$

שטח חצי מעגל:

$$\frac{2\pi}{2} = \pi$$

חישוב שטח המשולש ABC :

משולש ישר-זווית ב- B , עם ניצבים שאורכם 2:

$$\frac{1}{2} \times BA \times BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

סכום השטחים הכהים:

$$\pi - 2$$

תשובה (2).

שאלה 19 - בעיה מילולית - מעגל ילדים

השאלה: 100 בנים ו-101 בנות עומדים במעגל ומחזיקים ידיים. כמה בנות, לכל היותר, מחזיקות ידיים עם שני בנים?

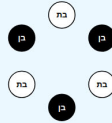
פיתרון:

אסטרטגיית פתרון:

קשה לדמיין מעגל עם 201 ילדים. לכן נתחיל ממספרים קטנים יותר כדי להבין את העיקרון, ואז נכליל לשאלה המקורית.

מקרה פשוט: 3 בנים ו-3 בנות:

כאשר מספר הבנים והבנות שווה, ניתן לסדר אותם במעגל לסירוגין - כך שלכל בת יש שני שכנים בנים:

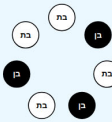


3 בנים ו-3 בנות לסירוגין

במקרה זה כל 3 הבנות מחזיקות ידיים עם שני בנים.

מוסיפים בת אחת: 3 בנים ו-4 בנות:

בשאלה המקורית מספר הבנות גדול ב-1 ממספר הבנים. נבדוק מה קורה כאשר מוסיפים בת נוספת למעגל:



3 בנים ו-4 בנות - 2 בנות צמודות

לא ניתן עוד לסדר את הילדים לסירוגין - שתי בנות חייבות להיות צמודות, ולכן רק לאחד משכניהן הוא בן. 2 הבנות הללו מחזיקות ידיים רק עם בן אחד, ושאר 2 הבנות מחזיקות ידיים עם שני בנים.

הכללה לשאלה המקורית:

נשתמש באותו עיקרון: אם היו 100 בנים ו-100 בנות - ניתן היה לסדרם לסירוגין, וכל 100 הבנות היו מחזיקות ידיים עם שני בנים. בשאלה יש בת אחת נוספת (101 בנות), ולכן 2 בנות חייבות להיות צמודות - ולכל אחת מהן יש רק שכן בן אחד.

מסקנה:

מתוך 101 הבנות:

2 בנות מחזיקות ידיים עם בן אחד בלבד (הן צמודות זו לזו),
וכל שאר הבנות יכולות להחזיק ידיים עם שני בנים. מספרן:

$$101 - 2 = 99$$

תשובה (2).



שאלה 20 - אלגברה - מספרים בטווח

השאלה: כמה מספרים בין 10 ל-12 (לא כולל 10 ו-12) מכפלתם ב-3 היא מספר שלם?

פיתרון:

הבנת השאלה:

המספרים בין 10 ל-12 (לא כולל) הם כל המספרים x כך ש- $10 < x < 12$. שימו לב שהטווח כולל גם מספרים שאינם שלמים.

מתי מכפלה ב-3 נותנת מספר שלם?

כדי שמכפלה ב-3 תיתן מספר שלם, המספר x חייב להיות כפולה של $\frac{1}{3}$.
למה? כי אם x שווה ל- $\frac{n}{3}$ (כאשר n מספר שלם), אז $x \times 3 = n$, שהוא מספר שלם.

מציאת גבולות הטווח:

המספר 10 שווה ל- $\frac{30}{3}$, והמספר 12 שווה ל- $\frac{36}{3}$.

כפולות $\frac{1}{3}$ בטווח הפתוח:

$$\begin{aligned}\frac{31}{3} &= 10\frac{1}{3} \\ \frac{32}{3} &= 10\frac{2}{3} \\ \frac{33}{3} &= 11 \\ \frac{34}{3} &= 11\frac{1}{3} \\ \frac{35}{3} &= 11\frac{2}{3}\end{aligned}$$

סה"כ 5 מספרים שמכפלתם ב-3 היא מספר שלם.

תשובה (1).

